Banque PT, France

Session 2003, filière PT

Mathématiques I A

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : moyennes arithmétiques et suites
- Partie B : continuité de la somme d'une série entière en 1
- Partie C : lien entre limite en l'infini et série

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2003/maths-1-a

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

PROBLEME

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A

1. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

   (a) On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$.

   i. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - l| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

   ii. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :

   $$|a_n - l| \leq \frac{|u_1-l|+|u_2-l|+\cdots+|u_{n_0}-l|}{n} + \frac{|u_{n_0+1}-l|+\cdots+|u_n-l|}{n}.$$

   iii. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne :

   $$\frac{|u_1-l|+|u_2-l|+\cdots+|u_{n_0}-l|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

   iv. Conclure.

   (b) On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

   i. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.
   On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée.
   On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   iii. On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
   Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par l. Conclure.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence :

$$u_1 \in]0,\pi[\quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < u_n < \pi$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

(b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n - \sin u_n \sim \frac{u_n^3}{6} \text{ puis } u_n^2 - u_{n+1}^2 \sim \frac{u_n^2\, u_{n+1}^2}{3}.$$

(c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Démontrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, u_{n+1}^2 = 3$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \alpha_k$ diverge.

A toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite de terme général : $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$.

(b) En s'inspirant de la question 1.a., montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l.

(a) Déterminer la limite de la suite de terme général : $v_n = \dfrac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n)$.

(b) Même question avec la suite de terme général :

$$w_n = \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{C}_n^0\, u_0 + \mathrm{C}_n^1\, u_1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n\, u_n\right)$$

où C_n^k désigne le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On pourra montrer que $\mathrm{C}_n^k \leq \dfrac{n^k}{k!}$.

PARTIE B

Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente. On note S sa somme.

1. Montrer qu'alors la série entière de coefficients a_n a un rayon de convergence R au moins égal à 1.

Dans toute la suite de cette partie on pose : $\forall x \in]-R,R[\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

On se propose d'étudier la continuité de la fonction f en 1.

2. Montrer que si $R > 1$ alors f est continue en 1.

3. On se place dans le cas où $R = 1$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle de rang n.

   (a) Soit $x \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$.

   i. Montrer que : $(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n\, x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n - S_N\, x^{N+1}$.

   ii. En déduire que : $\lim_{N\to+\infty} \left[(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n\, x^n\right] = f(x)$.

   (b) Montrer alors que le rayon de convergence de la série entière, de coefficients S_n, est au moins égal à 1, et que :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

   (c) Nous nous proposons de montrer que : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} - S\right) = 0$. Soit $\epsilon > 0$.

   i. Vérifier que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n.$$

   On supposera donc pour la suite que $S = 0$.

   ii. Montrer qu'il existe un entier positif N tel que : $n > N$ entraîne $|S_n| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

   iii. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\left|\dfrac{\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}\right| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

   iv. Montrer enfin qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in [1-\eta, 1[$ $\left|\dfrac{\sum_{n=0}^{N} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}\right| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

   Conclure.

   (d) En déduire que la fonction f est continue en 1.

4. Etablir la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ puis déterminer sa somme.

PARTIE C

Soit (d_n) une suite réelle convergente.

1. Montrer que la série entière de coefficients $\dfrac{d_n}{n!}$ a un rayon de convergence R infini.

   Dans la suite de cette partie, à toute suite réelle (d_n) convergente, on associe la fonction f_d définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\, x^n.$$

2. Montrer que la fonction f_d est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Nous nous proposons de montrer que si la suite (d_n) converge vers le réel l, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, f_d(t) = l$.

   (a) Justifier l'existence d'une suite réelle (r_n) convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $d_n = l + r_n$.

   (b) Montrer que pour tout réel t on a : $f_d(t) = l\mathrm{e}^t + f_r(t)$.

   (c) Soit $\epsilon > 0$, prouver l'existence d'un entier n_0 tel que : $n > n_0$ entraîne $|r_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

   Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$|f_r(t)| \leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|r_n|}{n!}\, t^n + \frac{\epsilon}{2}\, \mathrm{e}^t.$$

   (d) En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f_r(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$. Conclure.

4. On pose, $D_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_k$.

   Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$\int_0^x f_d(t)\mathrm{e}^{-t}\, dt = f_D(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

5. En déduire que si $\sum u_n$ est une série numérique convergente alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

   où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}\, t^n$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Nombres réels et suites numériques
- Suites récurrentes
- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt