Banque PT, France

Session 2003, filière PT

Mathématiques I B

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : deux problèmes de géométrie
- Partie II : boîte de conserve
- Partie III : fonctions contractantes
- Partie IV : fonction implicite
- Partie V : extrema liés
- Partie VI : triangle d'aire maximale
- Partie VII : extrema sur une ellipse pleine

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2003/maths-1-b

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

J55G

✵ Banque filière PT ✵

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Ce problème se compose de 7 parties. Les parties I et II sont totalement indépendantes des autres. Les parties III, IV, V sont liées entre-elles, mais il est possible d'admettre un résultat précédent pour poursuivre la résolution du problème. Enfin, les parties VI et VII utilisent le résultat obtenu dans la partie V.

Partie I

1. On considère un triangle ABC, rectangle en C et un point M sur le segment $[A, B]$. On note x la distance AC, a la distance de M à la droite (BC) et b la distance de M à la droite (AC). Calculer en fonction de x, a et b la longueur de l'hypoténuse AB du triangle.
2. On considère dans un plan deux couloirs perpendiculaires de 2 mètres de largeur chacun. Une barre métallique rigide (que nous supposerons sans épaisseur) glisse sur ce plan. On cherche à faire passer cette barre par les deux couloirs. Quelle est la longueur maximale de la barre qui peut passer d'un couloir à l'autre ?

Partie II

Un fabriquant de boîtes de conserve a une commande : il doit produire des boîtes cylindriques de volume V donné. Quelles doivent être les caractéristiques de la boîte (diamètre et hauteur) pour que le fabriquant utilise le moins de métal possible ?

Partie III

Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x - y|$$

où k est une constante strictement inférieure à 1.
On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I.

1. Montrer que la fonction f est continue sur I.
2. Montrer que si x_1 et x_2 sont deux réels vérifiant

$$f(x_1) = x_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = x_2,$$

alors $x_1 = x_2$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I.

4. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Partie IV

Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.
On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que

$$\forall (x, y) \in B, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,

$$\left|g(x, y') - g(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}|y - y'|.$$

4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \times [b - r, b + r] \subset U$ et tel que

$$\forall x \in I, \qquad \left|g(x, b) - g(a, b)\right| \leq \frac{r}{2}.$$

5. Déduire des deux dernières inégalités que

$$\forall (x,y) \in I \times [b-r, b+r], \qquad g(x,y) \in [b-r, b+r].$$

6. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \longmapsto g(x,y)$ est une application contractante sur $[b-r, b+r]$.
7. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b-r, b+r]$ tel que $f(x,y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$ et on admet que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
8. Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ sur I. En déduire l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f.

Partie V

Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x,y) \in U, f(x,y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$.

1. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b) = 0$ et tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) et contenu dans U, un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que

$$\big((x,y) \in V,\ f(x,y) = 0\big) \iff \big(x \in I, y = \varphi(x)\big).$$

   (b) Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$

   (c) La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose maintenant que le point (a,b) vérifie $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Montrer que l'implication de la question V1b est encore vraie.

Partie VI

Trouver le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (On pourra utiliser les résultats de la partie V).

Partie VII

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\right\}$$
$$\widetilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y < 1\right\}$$

On remarquera que D est un ensemble fermé et que $\tilde{D}$ est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble D.
2. Montrer que l'ensemble D est borné.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 e^y.$$

   Montrer que F admet un maximum global et un minimum global sur D.
4. Chercher les extrema locaux de F sur $\widetilde{D}$.
5. Déterminer les extrema globaux de F sur D.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivabilité et convexité
- Géométrie élémentaire du plan et de l'espace
- Suites récurrentes
- Limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt