Banque PT, France

Session 2003, filière PT

Physique I B

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie : équilibre électrostatique et régime stationnaire
- Deuxième partie : régime variable
- Troisième partie : propagation de signaux

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2003/physique-1-b

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

I54P

. Banque filière PT .

Epreuve de Physique I B

Durée 4 h

L'utilisation des calculatrices est autorisée.

Câble coaxial

NB : ***Toutes les figures de ce sujet sont regroupées en fin d'énoncé.***

Une ligne électrique est constituée d'un câble coaxial (voir figure 1 en dernière page). Dans tout le problème, ***les deux conducteurs du câble sont supposés creux****, et assimilés à deux* ***surfaces*** *parfaitement conductrices, cylindriques, de sections circulaires et coaxiales (voir figure 1). Le conducteur intérieur, noté conducteur (1), a un rayon a ; le conducteur extérieur, noté conducteur (2), a un rayon b ; la longueur du câble est ℓ. On utilise le système de coordonnées cylindriques et un point M est repéré par r,θ,z ; la base locale associée est alors $\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z$ (voir figure 1). L'espace entre les conducteurs contient un diélectrique linéaire, homogène et isotrope de permittivité relative $\varepsilon_r = 1$, diélectrique qu'on peut donc assimiler au vide.*

Pour les applications numériques on prendra : $a = 10^{-3}\,m$, $b = 1{,}65\cdot10^{-3}\,m$, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\,H\cdot m^{-1}$, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi\cdot10^9}\,F\cdot m^{-1}$. *On posera :* $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$.

La longueur ℓ est assez grande pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités et assimiler les champs et potentiels à ceux produits par un câble infiniment long.

On rappelle les expressions des opérateurs gradient, divergence et rotationnel en coordonnées cylindriques :

Pour $V = V(r,\theta,z)$ *et* $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$ *on a :*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Première partie : équilibre électrostatique et régime stationnaire.

I.1 Equilibre électrostatique.

On suppose que les conducteurs sont en équilibre électrostatique et portent respectivement les charges électriques $+Q$ *et* $-Q$ *uniformément réparties sur les surfaces des conducteurs de rayons a et b.*

I.1.1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.

I.1.2. Montrer que le champ électrostatique est radial et qu'il ne dépend que de r, soit : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

I.1.3. Etablir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q, ε_0, r, ℓ et de constantes à déterminer en distinguant trois domaines à définir.

I.1.4. Le conducteur (1) est porté au potentiel V_1 et le conducteur (2) est porté au potentiel V_2. Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, ε_0, ℓ, a et b.

I.1.5. La capacité C du condensateur formé par les deux conducteurs est le quotient de Q par la différence de potentiel $V_1 - V_2$; déterminer C en fonction de ε_0, ℓ, a et b. En déduire l'expression C'_0 de la capacité du câble par unité de longueur.

I.1.6. Quelle est la densité volumique d'énergie électrostatique ? En déduire l'énergie électrostatique emmagasinée W_e par le câble et retrouver l'expression de C.

I.1.7. Application numérique : calculer la valeur de C'_0 .

I.2 Régime stationnaire.

On utilise le câble coaxial pour alimenter une charge. Le conducteur (1) constitue le conducteur aller du courant électrique constant d'intensité I_0 *(dans le sens de l'axe Oz). Le conducteur (2) est le conducteur retour de ce courant. La répartition du courant est superficielle et uniforme sur chaque conducteur creux. Les vecteurs courants surfaciques valent respectivement* $\vec{j}_{s1} = \frac{I_0}{2\pi a}\,\vec{u}_z$ et $\vec{j}_{s2} = \frac{-I_0}{2\pi b}\,\vec{u}_z$.

I.2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{B} = B(r)\cdot\vec{u}_\theta$.

I.2.2. Etablir l'expression de $B(r)$ en distinguant trois domaines à définir. Tracer le graphe de $B(r)$.

I.2.3. Quelle est la densité volumique d'énergie magnétique ? En déduire l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble .

I.2.4. Rappeler le lien entre l'énergie magnétique emmagasinée W_m et l'inductance propre L du câble coaxial ; en déduire l'expression de L en fonction de μ_0, ℓ, a et b, puis de l'inductance propre par unité de longueur L'_0 .

I.2.5. Application numérique : calculer la valeur de L'_0 .

I.2.6. Que vaut le produit $L'_0\,C'_0$?

Deuxième partie : régime variable

On se place dans le cadre de la théorie générale de l'électromagnétisme. La répartition des courants possède les propriétés suivantes : à un instant t et à une abscisse z donnés, on note $i(z,t)$ *l'intensité du courant à travers une section droite du conducteur (1) et* $-i(z,t)$ *l'intensité du courant à travers une section droite du conducteur (2). Les vecteurs courants surfaciques sont respectivement* $\vec{j}_{s1} = \frac{i(z,t)}{2\pi a}\vec{u}_z$ et $\vec{j}_{s2} = \frac{-i(z,t)}{2\pi b}\vec{u}_z$. *La répartition des charges est encore de nature surfacique sur chacun des conducteurs, mais on utilise dans la suite, afin d'alléger l'étude, les charges par unité de longueur :* $\lambda(z,t)$ *pour le conducteur (1) et* $-\lambda(z,t)$ *pour le conducteur (2). Ainsi, la charge portée, à l'instant t, par le tronçon du conducteur (1) situé entre les cotes z et z+dz vaut* $\lambda(z,t)dz$. *Pour* $a < r < b$ *les champs électrique et magnétique ont la forme* $\vec{B} = B(r,z,t)\cdot\vec{u}_\theta$ *et* $\vec{E} = E(r,z,t)\cdot\vec{u}_r$. *Ils seront supposés nuls en dehors de ce domaine. Le potentiel électrique a la forme* $v(r,z,t)$ *et on prendra le conducteur (2) comme référence de potentiel, soit :* $v(b,z,t) = 0$.

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ *a la forme* $\vec{A} = A(r,z,t)\vec{u}_z$ *; on peut faire le choix :* $A(b,z,t) = 0$.

II.1. Etude à partir des équations de Maxwell.

*NB : **La sous-partie II.2 et la partie III peuvent être étudiées sans avoir terminé le traitement de cette sous-partie II.1** .*

II.1.1. Que peut-on dire de la divergence du champ $\vec{B}$ proposé ? Commenter.

II.1.2. Appliquer la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère sur un disque d'axe Oz et de rayon r compris entre a et b; en déduire l'expression de $B(r,z,t)$ en fonction de μ_0, $i(z,t)$ *et de* r, sous la forme $B(r,z,t)=\alpha_B \cdot \frac{\mu_0\, i(z,t)}{r}$ où α_B est une constante à déterminer.

II.1.3. A partir de la forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère, exprimée pour $a<r<b$, obtenir une relation notée (R_1) entre une dérivée partielle de $B(r,z,t)$ et une dérivée partielle de $E(r,z,t)$.

II.1.4. Appliquer la forme locale de l'équation de Maxwell-Faraday pour $a<r<b$. En déduire une relation notée (R_2) entre une dérivée partielle de $B(r,z,t)$ et une dérivée partielle de $E(r,z,t)$.

II.1.5. Déduire des trois questions précédentes que l'intensité $i(z,t)$ satisfait à une équation de d'Alembert que l'on établira (on pourra éliminer $E(r,z,t)$ entre les équations (R_1) et (R_2) en utilisant le théorème de Schwartz). Préciser la vitesse le propagation.

II.1.6. Appliquer le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz, de rayon r $(a<r<b)$ et de longueur δz. En déduire l'expression de $E(r,z,t)$ en fonction de ε_0, $\lambda(z,t)$ et r.

II.1.7 Appliquer le principe de conservation de la charge sur le cylindre précédent pendant l'intervalle de temps δt. En déduire une relation entre une dérivée de $\lambda(z,t)$ et une dérivée de $i(z,t)$.

II.1.8. Retrouver ce résultat à partir des questions précédentes (II.1.2 à II.1.6).

II.1.9 Etablir que $\lambda(z,t)$ satisfait à une équation de propagation.

II.1.10.a. Rappeler le lien entre $\vec{E}$, $\overrightarrow{grad}$ v et $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

b. Montrer que $E(r,z,t)$ s'exprime à partir d'une dérivée partielle de $v(r,z,t)$.

II.1.11. A partir de la relation (R_2), établir une relation entre $\frac{\partial\, v(a,z,t)}{\partial\, z}$, a, b, μ_0 et $\frac{\partial\, i}{\partial\, t}$. Montrer que cette relation correspond à une loi des mailles écrite entre z et $z+dz$.

II.1.12. A partir de la relation (R_1), établir une relation entre $\frac{\partial i}{\partial z}$, a, b, ε_0 et $\frac{\partial\, v(a,z,t)}{\partial\, t}$. Montrer que cette relation correspond à une loi des nœuds écrite à la cote z.

II.1.13. Est-ce que l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires est vérifiée ? Pourquoi ?

II.1.14. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ pour $a < r < b$ en fonction de $\lambda(z,t)$, $i(z,t)$ et de constantes à déterminer.

On admet que $\lambda(z,t) = \lambda_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$ *et* $i(z,t) = i_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$.

II.1.15. Quelle relation lie λ_0, i_0 et c ?

II.1.16. Calculer la puissance moyenne P transportée par le câble. Pour i_0 et a donnés, la puissance par unité de surface de câble $\frac{P}{\pi b^2}$ est fonction de b. Tracer $\frac{P}{\pi b^2}$ en fonction de b. Quel critère a conduit selon vous au choix de la valeur numérique du rapport $\frac{b}{a}$? On rappelle que $a = 10^{-3}\text{m}$ *et* $b = 1{,}65 \cdot 10^{-3}\text{m}$.

II.2. Etude à partir d'un schéma équivalent. (voir figure 2 en dernière page)

On admet que la portion de câble comprise entre les plans de cotes très voisines z *et* $z + dz$ *peut être modélisée par le circuit* ***de la figure 2****. Elle possède une capacité* $C'_0\, dz$ *entre les conducteurs et une inductance propre* $L'_0\, dz$ *entre les sections d'entrée et de sortie.*

II.2.1. Montrer que $v(a,z,t)$ et $i(z,t)$ (fonctions supposées de classe C^2) vérifient les relations suivantes :

$\frac{\partial v}{\partial z} = -L'_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial z} = -C'_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$.

II.2.2. Retrouver que $v(a,z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient une équation de propagation.

On admet que les solutions générales sont : $v(a,z,t) = v_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + v_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$ *et* $i(z,t) = i_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + i_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$.

II.2.3. Interpréter les significations physiques des grandeurs d'indice 1 et 2.

II.2.4. Montrer que :

$$\begin{cases} v_1\left(t-\dfrac{z}{c}\right)=R_C\cdot i_1\left(t-\dfrac{z}{c}\right)+v_{10} \\ v_2\left(t+\dfrac{z}{c}\right)=-R_C\cdot i_2\left(t+\dfrac{z}{c}\right)+v_{20} \end{cases}$$

v_{10} et v_{20} sont des constantes. R_C est appelée résistance caractéristique du câble. Exprimer R_C en fonction de ε_0, μ_0, a et b. Calculer numériquement R_C.

Troisième partie : Propagation de signaux.

III.1. Signaux sinusoïdaux.

Un générateur de tension impose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω dans le câble coaxial. Une résistance de charge R_U est branchée en sortie du câble. Les grandeurs v_1, v_2, i_1 et i_2 introduites en II.2.3 deviennent des fonctions sinusoïdales de $\omega\left(t-\dfrac{z}{c}\right)$ pour les grandeurs d'indice 1 , et de $\omega\left(t+\dfrac{z}{c}\right)$ pour les grandeurs d'indice 2 . ***Dans toute la suite du problème*** *, nous supposerons que les constantes v_{10} et v_{20} sont nulles.*

Les grandeurs à l'entrée du câble sont notées avec l'indice e et les grandeurs à la sortie du câble avec l'indice s :

$v_e(t)=v(a,0,t)$, $v_s(t)=v(a,\ell,t)$, $i_e(t)=i(0,t)$ et $i_s(t)=i(\ell,t)$

On utilise la notation complexe et on pose $k=\dfrac{\omega}{c}$. *On écrit alors :*

$$\underline{v}_1=\underline{V}_{10}\cdot e^{j(\omega t-kz)},\ \underline{v}_2=\underline{V}_{20}\cdot e^{j(\omega t+kz)},\ \underline{i}_1=\frac{\underline{V}_{10}}{R_C}\cdot e^{j(\omega t-kz)},\ \underline{i}_2=\frac{-\underline{V}_{20}}{R_C}\cdot e^{j(\omega t+kz)}$$

où $\underline{V}_{10}$ et $\underline{V}_{20}$ *sont des nombres complexes constants.*

On utilisera les amplitudes complexes $\underline{V}(z)$ *et* $\underline{I}(z)$ *de* $v(a,z,t)$ *et* $i(z,t)$ *telles que :*

$$\begin{cases} \underline{V}(z)=\underline{V}_{10}\cdot e^{-jkz}+\underline{V}_{20}\cdot e^{jkz} \\ \underline{I}(z)=\dfrac{\underline{V}_{10}}{R_C}\cdot e^{-jkz}-\dfrac{\underline{V}_{20}}{R_C}\cdot e^{jkz} \end{cases}$$

III.1.1. A l'entrée du câble, on note $\underline{V}(0)=\underline{V}_e$, $\underline{I}(0)=\underline{I}_e$ et à la sortie $\underline{V}(\ell)=\underline{V}_s$, $\underline{I}(\ell)=\underline{I}_s$. En éliminant $\underline{V}_{10}$ et $\underline{V}_{20}$ Trouver les deux fonctions f et g telles que :

$$\begin{cases} \underline{V}_e=f(k\ell)\cdot\underline{V}_s+jR_C\,g(k\ell)\cdot\underline{I}_s \\ \underline{I}_e=j\dfrac{g(k\ell)}{R_C}\cdot\underline{V}_s+f(k\ell)\cdot\underline{I}_s \end{cases}$$

III.1.2. En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}$ en fonction de R_U, R_C, k et ℓ.

III.1.3. Quelle est la valeur de R_u qui rend $\underline{Z}_e$ indépendante de la pulsation ?

III.2. Signaux impulsionnels. (voir figure 3 en dernière page)

Le câble coaxial est alimenté en entrée par un générateur de résistance interne $R_G = R_C$ *(figure 3); Il est branché en sortie sur une résistance de charge* R_U. *Le fonctionnement du générateur est modélisé à l'aide d'une force électromotrice variable* $e(t)$. *Pour* $t < 0$ $e(t) = 0$ *et pour* $t \geq 0$ $e(t) = E$.

III.2.1. a. En utilisant le lien entre les grandeurs de sortie $v_s(t) = v(a, \ell, t)$ et $i_s(t) = i(\ell, t)$, montrer que : $v_2\left(t + \dfrac{\ell}{c}\right) = \alpha \cdot v_1\left(t - \dfrac{\ell}{c}\right)$ pour $t \geq \dfrac{\ell}{c}$, où α est une constante à déterminer.

b. Quelle est la signification physique de α ?

c. En déduire que : $v_2(t) = \alpha \cdot v_1\left(t - \dfrac{2\ell}{c}\right)$.

d. Commenter physiquement cette dernière relation .

e. Calculer α pour $R_U = 0$, $R_U = R_C$, $R_U = \infty$.

III.2.2. De même, en explicitant le lien entre les grandeurs d'entrée $v_e(t) = v(a, 0, t)$ et et $i_e(t) = i(0, t)$, montrer que : $v_1(t) = \dfrac{E}{2}$ pour $t \geq 0$.

III.2.3. Tracer le graphe de $v_e(t)$ pour les valeurs suivantes de R_U : $R_U = 0$, $R_U = R_C$, $R_U = \infty$. Commenter.

III.2.4. On suppose R_G et R_U quelconques. Quel est le shéma électrique équivalent en régime établi ? Décrire **qualitativement** l'évolution de $v_e(t)$ pendant le régime transitoire.

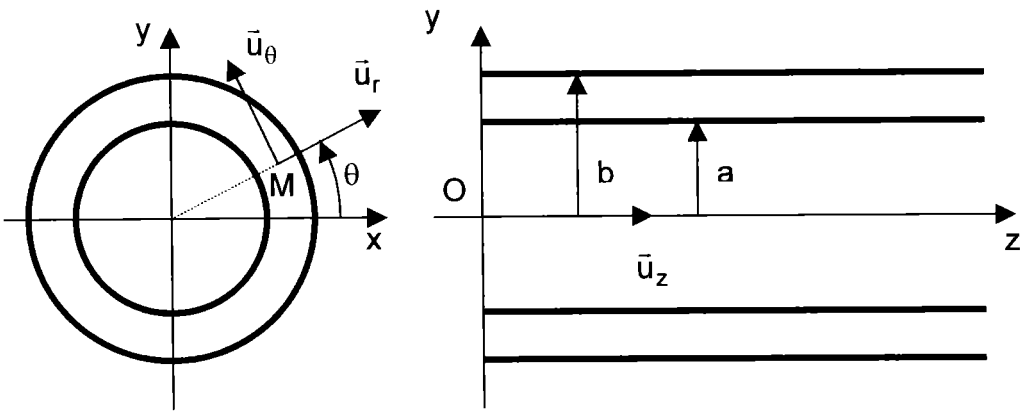


Figure 1

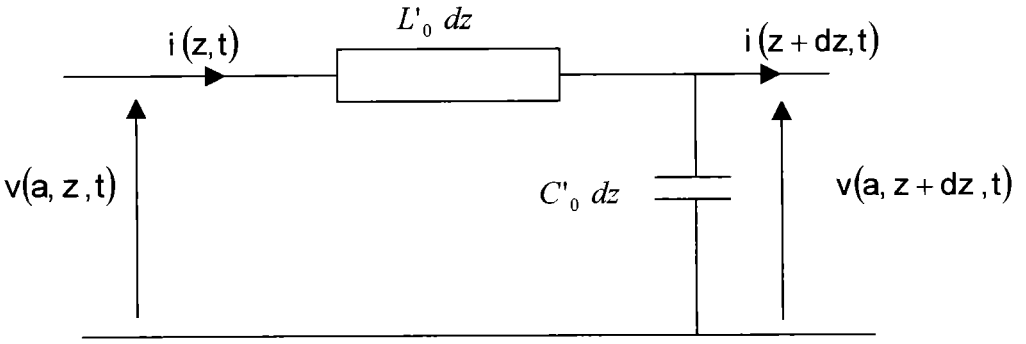


Figure 2

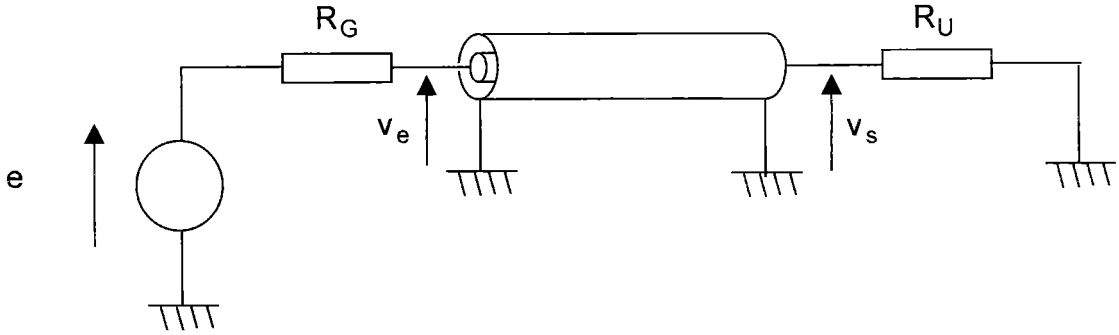


Figure 3

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Électrostatique : formulation locale et condensateur
- Magnétostatique : formulation locale
- Conduction électrique et conservation de la charge
- Propagation d'un signal
- Régime sinusoïdal forcé

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt