Banque PT, France

Session 2004, filière PT

Mathématiques II B

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I. Étude de la fonction Bêta
- II. Étude de la fonction Gamma
- III. Équation de Bessel

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2004/maths-2-b

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

RS80

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

L'objet de ce problème est de déterminer la forme générale sur $]\,0\,,\,+\,\infty\,[$ des solutions de l'équation différentielle :

$$x^2\,y'' + x\,y' + \left(x^2 - \lambda^2\right) y \;=\; 0 \qquad (\mathscr{E})$$

où λ est un réel positif non entier.

I. Etude de la fonction Bêta

u et v étant des réels strictement positifs, on pose :

$$B(u\,,\,v) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{t^{\,u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt\;.$$

1. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [\,0\,,\,n\,]\;,$$

$$f_n(x) \;=\; 0 \text{ si } x \notin [\,0\,,\,n\,]\,,$$

On désigne par f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, déterminer la limite lorsque n tend vers + ∞ de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

b. n étant un entier strictement supérieur à 1, on introduit la fonction définie par :
$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ si $x \in [\,0\,,\,n\,]$, $\varphi_n(x) = 0$ si $x \notin [\,0\,,\,n\,]$.
Etudier les variations de φ_n (Pour déterminer le signe de φ_n ', on pourra étudier la fonction ψ_n, définie sur $[\,0\,,\,n\,[$ par : $\psi_n(x) \;=\; (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x\;$).

c. Montrer qu'il existe un unique réel α_n dans $]\,1\,,\,n\,[$ tel que φ_n soit maximale en α_n .

d. Montrer que $\varphi_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n}\,e^{-\alpha_n}$.

e. Montrer que : $0 \leq \varphi_n(\alpha_n) \leq \frac{1}{ne}$ (on pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto x e^{-x}$).

f. Tracer le graphe de φ_n sur $[0, n]$.

2. *a.* Montrer que l'on peut écrire : $B(u, v) = \int_0^1 (1-t)^{v-1} t^{u-1} dt$.

b. Montrer que : $B(u, v) = B(v, u)$.

c. Démontrer l'égalité suivante : $B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$.

3. Pour tout entier n strictement supérieur à 1, et tout réel $x > 0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

a. Par un changement de variable judicieux, montrer que : $I_n(x) = n^x B(n+1, x)$.

b. En déduire la valeur de $I_n(x)$.

II. Etude de la fonction Gamma

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ pour $x > 0$.

1. Vérifier la convergence de l'intégrale définissant Γ .

2. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction Γ_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} dt$.

a. Les fonctions Γ_n sont-elles continues ?

b. Pour tout réel x strictement positif, montrer que $\Gamma_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Que vaut $\Gamma(1)$?

d. Calculer, pour tout entier strictement positif n, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Pour tout réel $x > 1$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x\text{-}1)$.
Montrer que cette formule permet alors de prolonger Γ à $]-1, 0[$.
En déduire que l'on peut prolonger Γ à $]-\infty, 0[\setminus \mathbb{Z}^-$.

4. Soit x un réel strictement positif.

a. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \varepsilon$$

b. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) dt \right| \leq \varphi_n(\alpha_n) \int_0^A t^{x-1} dt$$

c. En déduire l'existence d'un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

d. Quelle est la limite de $I_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

e. En déduire : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{(x+n)(x+n-1)\ \dots\ x}$.

III. Equation de Bessel

On utilisera, dans cette partie, le prolongement de la fonction Γ à $]-\infty, 0[\setminus \mathbb{Z}^-$ introduit dans la partie II.

1. *a.* λ étant le réel positif non entier intervenant dans ($\mathscr{E}$) , soit $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)\, x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$, dépendant du réel λ.
Pour x dans $]0, R[$, on pose : $y(x) = x^\lambda a(x)$.

On suppose que la fonction y est solution de ($\mathscr{E}$) sur $]0, R[$, et n'est pas identiquement nulle. Montrer que, pour $n \geq 2$:

$$a_n(\lambda) = \frac{-a_{n-2}(\lambda)}{n^2 + 2n\lambda}$$

b. Donner la valeur du coefficient $a_1(\lambda)$.

c. Quelles valeurs peut prendre $a_0(\lambda)$? Que peut-on déduire des valeurs de $a_0(\lambda)$ et $a_1(\lambda)$ pour la somme de la série $\left(\sum a_n(\lambda)\, x^n\right)$?

d. Montrer que R est infini, et que la fonction y est solution de ($\mathscr{E}$) sur $]0, +\infty[$.

e. On suppose, dans ce qui suit, que : $a_0(\lambda) = \frac{1}{2^\lambda\ \Gamma(\lambda+1)}$.

Montrer que, pour tout entier p : $a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\ p!\ \Gamma(\lambda+p+1)}$.

f. On pose, pour tout réel strictement positif x : $J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n$.

Montrer que $J_{-\lambda}$ est aussi solution de ($\mathscr{E}$) sur $]0, +\infty[$.

g. Montrer que :

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\ \Gamma(\lambda+n+1)} .$$

h. On suppose que ($J_{-\lambda}$, J_{λ}) est une base de l'espace des solutions de ($\mathscr{E}$) sur] 0 , + ∞ [.

Donner la forme générale des solutions de ($\mathscr{E}$) sur] 0 , + ∞ [.

2. Soit y une solution non identiquement nulle de l'équation de Bessel ($\mathscr{E}$) sur] 0 , + ∞ [, pour une valeur de λ fixée. On considère la fonction u définie pour tout réel strictement positif x par :

$$u(x) = x^{1/2}\, y(x).$$

a. Déterminer un nombre σ tel que, pour $x > 0$:

$$u''(x) + \left(1 + \frac{\sigma}{x^2}\right) u(x) = 0$$

b. On suppose que $\lambda = 1/2$. Déterminer y et tracer son graphe.

L'équation de Bessel régit en particulier les vibrations des membranes circulaires, comme celles d'instruments musicaux tels que le tambour, ou la grosse caisse.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Séries entières
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt