Banque PT, France

Session 2007, filière PT

Mathématiques A

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : définition et propriétés de T_n
- Partie B : normes et produit scalaire sur R[X]
- Partie C : endomorphisme Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2007/maths-a

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

✵ Banque filière PT ✵

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}.$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

PARTIE A

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?
3. Étudier la parité de T_n.
4. Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
5. Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
   (a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos\theta) = 0$?
   (b) Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1,\ 1]$. Conclure.
7. Déterminer les racines de T_n'.

PARTIE B

On définit les applications L et N de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad L(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| \quad ; \quad N(P) = \max_{0\le k\le n} |a_k|.$$

On considère enfin l'application φ de $\mathbb{R}[X]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,\ Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \varphi(P,\ Q) = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\, d\theta.$$

1. Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} L(P) = 0 \iff P = 0 \quad &\text{et} \quad N(P) = 0 \iff P = 0\ ; \\ L(\lambda P) = |\lambda| L(P) \quad &\text{et} \quad N(\lambda P) = |\lambda| N(P)\ ; \\ L(P+Q) \le L(P) + L(Q) \quad &\text{et} \quad N(P+Q) \le N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

2. Montrer que $\gamma_n = n + 1$ vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad L(P) \le \gamma_n N(P).$$

3. Donner un exemple de polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$L(Q) = \gamma_n N(Q).$$

   Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $L(T_n)$.

5. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n, T_n)$ et $\varphi(T_n, T_m)$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k.$$

   Vérifier alors que pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on a :

$$|\alpha_k| \leq 2L(P).$$

8. Dans cette question uniquement, l'entier n est strictement positif. Montrer que :

$$N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1}).$$

9. On pose $q = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N(T_n) \leq q^n.$$

10. En déduire que l'on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad N(P) \leq q^{n+1}\sqrt{2}L(P).$$

PARTIE C

On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$.
3. En déduire $\ker(\Phi)$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Calculer la trace de Φ.
6. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
7. Déterminer les sous-espaces propres de Φ.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes et fractions rationnelles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Compléments d'algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt