Banque PT, France

Session 2011, filière PT

Mathématiques C

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Préliminaire : comparaison série-intégrale
- Première partie : séries en 1/(n (ln n)^2) et constante d'Euler
- Deuxième partie : séries de Bertrand
- Troisième partie : une série à développement asymptotique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2011/maths-c

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

A rendre avec la copie 2 feuilles de papier millimétré

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique)

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$:

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

c. Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq n_0} f(n) \right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

I. Première partie

1. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).

Pour $t \geq e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

b. Etudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$.

d. Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2} \right)$?

2. Pour $t \geq e$, on considère la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de g sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $g'(t)$.

b. Etudier les variations de g sur $[e, +\infty[$

c. Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[e, +\infty[$.

d. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ est-elle convergente ?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2(\ln n)^2} \right)$?

3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

a. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt$.

b. On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

c. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $u_n \geq \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$.

d. Montrer que la suite $\left(u_n \right)_{n \geq 1}$ converge.

e. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leq \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$, et conclure sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

4. On considère la suite $\left(H_n \right)_{n \geq 1}$, définie par : $H_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln (n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

b. Montrer que la suite $\left(H_n - \ln n \right)_{n \geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).

On notera ℓ sa limite.

c. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 1} \left(\gamma_{n+1} - \gamma_n \right) \right)$?

Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du *b*.

d. Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n}{n-1} \right) = \ell - 1$.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \dfrac{k}{k-1} - \dfrac{1}{k} \right)$.

f. Soit ε un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geq n_0$:

$$\left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

g. Montrer que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

h. Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} \left(H_n - \ln n - \ell - \dfrac{1}{2n} \right)$.

II. Deuxième partie

Soient h et β deux réels, avec $h > 0$.

1. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t^h \left(\ln t \right)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

2. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$: $0 < \dfrac{1}{t^h (\ln t)^\beta} < 1$.

3. On pose, dans ce qui suit : $\alpha = 1 + 2h$. Déduire du 2. que, pour $t \geq t_0$:

$$0 < \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}} .$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est-elle convergente ?

5. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)$?

III. Troisième partie

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par : $v_n = 1 - \dfrac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)}$.

a. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - \dfrac{\left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)}{\ln n}}$,

c. Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left| v_n - \dfrac{a}{n^2 \ln n} \right| \leq \dfrac{b}{n^2 (\ln n)^2}$.

où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Que peut-on en déduire pour la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} v_n \right)$?

Les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ ***sont appelées Séries de Bertrand (la série harmonique*** $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right)$ ***est un cas particulier) . Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.***

FIN DE L'EPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Nombres réels et suites numériques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt