Banque PT, France

Session 2013, filière PT

Mathématiques A

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Question préliminaire : produit matriciel et convergence de suites de matrices
- Partie I : une matrice 3 x 3 et sa limite
- Partie II : matrice 2 x 2 à coefficients positifs
- Partie III : matrices stochastiques
- Exercice de géométrie : une surface quadrique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2013/maths-a

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes, à coefficients complexes. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients complexes,

Question préliminaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.
   (a) A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.

2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.
   On dit que la suite de matrices converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $(a_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.
   (a) Montrer que si la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et si la suite de matrices $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B, alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

3. On note
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}.$$
   Calculer D^n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On demande ici une expression explicite de la limite.

5. Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = (\ a \quad b \quad c\ )$ tel que

   - $a > 0$, $b > 0$, et $c > 0$,
   - $a + b + c = 1$,
   - $\pi A = \pi$.

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.

2. Soit p un entier strictement positif.

   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que

   $$X^p = P(X)Q(X) + \alpha_p X + \beta_p.$$

   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs de X bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.

   (c) En déduire une expression de B^p.

3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III

Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
On dit que la matrice M est ***stochastique*** si

- pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$:

$$m_{ij} \geq 0$$

- la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

Tournez la page S.V.P.

1. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice stochastique.
   Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$:

$$m_{ij} \leq 1$$

2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si X_1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.

   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$.

   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
   Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$:

$$|y_i| \leq 1$$

   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :

$$|\lambda| \leq 1$$

   (c) Montrer que toutes les valeurs propres de M sont de module inférieur à 1.

Exercice de Géométrie

Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface (S) d'équation paramétrique

$$\alpha yz + \beta xz + \gamma xy = 0$$

où α, β, γ sont des paramètres réels non tous nuls.

1. Quelle est la nature de (S) pour $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$?
2. De façon générale, quelle est la nature de (S) lorsque un ou deux paramètres sont nuls ?
3. Quelle est la nature de (S) lorsque $\alpha\beta\gamma \neq 0$?

4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & -\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel λ tel que A soit de rang 1 si et seulement si

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2.$$

(b) En déduire que (S) est une surface de révolution si et seulement si $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$.

5. Donner les éléments caractéristiques de la surface (S) quand $\alpha = \beta = \gamma$.

IN CHOISY - 13 1058 - D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Polynômes et fractions rationnelles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt