Banque PT, France

Session 2014, filière PT

Mathématiques A

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude d'une projection orthogonale
- Partie II : une formule de changement de base
- Partie III : projections orthogonales de l'hélice
- Partie IV : caractérisations des projecteurs orthogonaux

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie du sujet officiel sans son document réponse (tracé de la partie III, question 1.e) ; l'énoncé est complet.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2014/maths-a

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

098

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie I : Etude d'une projection orthogonale

Dans cette partie, on travaille dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le vecteur

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{k}).$$

On désigne par D la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ et F le plan vectoriel orthogonal à D.

1. On note p_D la projection orthogonale sur D et A sa matrice dans la base canonique.
   (a) Que vaut A^2 ?
   (b) Que vaut, pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u}-p_D(\vec{u}),\vec{n}\rangle$?
   (c) En déduire que, pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$, $p_D(\vec{u}) = \langle\vec{u},\vec{n}\rangle\,\vec{n}$.
   (d) Calculer $p_D(\vec{n})$.
   (e) Rappeler la définition d'un vecteur propre.
   (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de p_D.
   (g) L'endomorphisme p_D est-il diagonalisable ?
   (h) Vérifier que
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
2. Reprendre les mêmes questions pour p_F, projection orthogonale sur F, et déterminer sa matrice B dans la base canonique (on pourra dans un premier temps exprimer p_F en fonction de p_D).

Partie II : Une formule de changement de base

On considère toujours l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, et on reprend les notations de la partie I. Soit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{k})$, on note D la droite engendrée par $\vec{n}$ et F le plan orthogonal à D, et on note p_D (resp. p_F) la projection orthogonale sur D (resp. sur F).

1. On pose $\vec{I} = \dfrac{p_F(\vec{k})}{\left\|p_F(\vec{k})\right\|}$, et on définit le vecteur $\vec{J}$ de sorte que $(\vec{I},\vec{J},\vec{n})$ soit une base orthonormée indirecte de $\mathbb{R}^3$. Sans calculer les coordonnées de $\vec{I}$ et $\vec{J}$, montrer que
   $$\vec{J}\in F\cap \mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath}).$$

2. On note P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$. Après avoir rappelé ce que représentent les colonnes de P, donner l'expression de P.
3. En déduire les expressions de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ en fonction de $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{n}$, puis celles de $p_F(\vec{\imath})$, $p_F(\vec{\jmath})$, $p_F(\vec{k})$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Son image par p_F a pour coordonnées (X, Y) dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ de F. Donner l'expression de X et Y en fonction de x, y et z.

Partie III : Projections orthogonales de l'hélice

On se place désormais dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère dans cet espace l'hélice circulaire (H), dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \\ z(t) = 2\sqrt{2}\,t. \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

On reprend les notations de la partie précédente : $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} + \vec{k}\right)$; on désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$. On note (C) l'image de (H) par la projection p.

1. On rappelle que D est la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$, F est le plan vectoriel orthogonal à D, et p_D et p_F sont les projections orthogonales sur D et F respectivement. On définit les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ comme dans la partie précédente.
   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$ est donnée par

$$\begin{cases} X(t) = 2\,t - \cos(t) \\ Y(t) = \sqrt{2}\sin(t) \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

   (b) Montrer que tous les points de la courbe (C) sont réguliers.
   (c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Comment se déduit alors le reste de la courbe à partir de cette restriction ?
   (d) Etudier les variations de X et de Y pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Tracer sur le document-réponse joint la courbe (C) pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 3\pi\right]$. La courbe devra être tracée à l'échelle 1.

Tournez la page S.V.P.

Partie IV : Caractérisations des projecteurs orthogonaux

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle projecteur un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$.

1. Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$, montrer que
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \qquad \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|.$$
2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p.$$
   (b) Montrer que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
3. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|.$$
   (a) Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$ et $\vec{y} \in \operatorname{Ker} p$. En considérant le vecteur $\vec{u} = \vec{x} + \lambda\vec{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
   $$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \|\vec{y}\|^2 + 2\lambda\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \geq 0.$$
   En déduire que $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.
   (b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(\vec{e}_i), \vec{x}\rangle \vec{e}_i.$$
   (a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En exprimant $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, montrer que, pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
   $$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle\vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle.$$
   (c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle\vec{x}, g(\vec{y})\rangle.$$
   Montrer que $g = f^*$.
5. Soit p un projecteur orthogonal.
   (a) Montrer que, pour tous $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle p(\vec{x}), p(\vec{y})\rangle$.
   (b) En déduire que $p = p^*$.
6. Soit p un projecteur.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} p^* \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
   (b) Soit $\vec{y} \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\langle\vec{x} - p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = 0$.
   En déduire que $\vec{y} = p^*(\vec{y})$ puis que $(\operatorname{Ker} p)^\perp \subset \operatorname{Im} p^*$.
   (c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.

IN CHOISY – 14 1098 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt