Banque PT, France

Session 2023, filière PT

Mathématiques C

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Préambule : décomposition en éléments simples
- Partie I : une série entière et une série numérique
- Partie II : formule sommatoire et constante d'Euler

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2023/maths-c

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 2 feuilles de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Tournez la page S.V.P.

Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}$$

1. En calculant, de deux façons différentes :

   $$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)\ g(x)$$

   établir que :

   $$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$$

   Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

   $$P(x) = 1$$

   avec l'hypothèse suivante :

   $$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

   Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Partie I

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x\,(x+1)}{(2\,x+1)^2}\right)$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.
3. Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:

$$f(x) = \frac{1}{x\,(x+1)\,(2\,x+1)}$$

4. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série entière $\sum f(n)\,x^{2\,n+1}$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.
   (b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$, ainsi que son rayon de convergence.
   (c) *i.* Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, en précisant le rayon de convergence.
   ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (d) Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\,\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, en précisant le rayon de convergence, que l'on comparera à la valeur R obtenue en a.
   (e) Montrer que, pour tout réel x de $]-R, R[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{n} = -x\,\ln\left(1-x^2\right)$$

   (f) Pour tout réel x de $]-R, R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$$

   Indication : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.
   (g) Déterminer :

$$\lim_{x \to 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}\right)$$

Tournez la page S.V.P.

5. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$.
   (a) Etudier la convergence de la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$.
   (b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\,k+1} = H\,(2\,n+1) - \frac{1}{2}\,H(n)$$

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4\,H(n) - 4\,H(2\,n+1) + \frac{1}{n+1}$$

Partie II

Soit h une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives, et $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

Pour tout réel positif x, on désigne par $n_x = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, et on pose :

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n_x} a_k$$

avec <u>la convention</u> $A(0) = 0$.

1. Tracer, sur deux graphes distincts, les courbes représentatives respectives de la fonction partie entière, et de la fonction qui, à tout réel $t \geq 1$, associe $t - \lfloor t \rfloor$ (échelle : 1 cm pour une unité).
2. Dans cette question uniquement, on désigne par $(u_n)_{n \in n\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} A(k)\ \{u_{k+1} - u_k\} = \sum_{k=1}^{n} \{A(k-1) - A(k)\}\ u_k + A(n)\,u_{n+1}$$

3. Vérifier que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$A(n_x) = A(x)$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k :

$$\int_k^{k+1} A(t)\,h'(t)\,dt = A(k) \int_k^{k+1} h'(t)\,dt$$

5. Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$\int_1^{n_x} A(t)\, h'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\ \{h(k+1) - h(k)\}$$

6. Exprimer, pour tout entier naturel $k \geq 2$, $A(k) - A(k-1)$ en fonction de a_k.
7. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\ \{h(k+1) - h(k)\} = \sum_{k=2}^{n_x} \{A(k-1) - A(k)\}\ h(k) + A(n_x)\, h(n_x)$$

(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n_x} a_k\, h(k) = A(x)\, h(x) - \int_1^x A(t)\, h'(t)\, dt$$

8. On suppose désormais que, pour tout entier naturel non nul n : $a_n = 1$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 1$, $A(t)$ est égal à la partie entière de t :

$$A(t) = n_t$$

(b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$n_x\, h(n_x) - h(1) = \int_1^{n_x} h(t)\, dt + \int_1^{n_x} t\, h'(t)\, dt$$

(c) A l'aide des relations des questions précédentes, montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = h(1) + \int_1^{n_x} \{t - n_t\}\ h'(t)\, dt + \int_1^{n_x} h(t)\, dt$$

9. Dans ce qui suit, on suppose désormais que h est la fonction qui, à tout réel $t \geq 1$, associe :

$$h(t) = \frac{1}{t}$$

(a) *i.* Montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\frac{t - n_t}{t^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ii. Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \{t - n_t\}\ \frac{dt}{t^2}$$

iii. Que vaut :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_N^{+\infty} \{t - n_t\}\ \frac{dt}{t^2} \quad ?$$

Tournez la page S.V.P.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^N \frac{dt}{t} - \int_1^N \{t - n_t\} \, \frac{dt}{t^2}$$

(c) Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que, lorsque l'entier N tend vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$$

10. A l'aide des résultats précédents, déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \{4\,H(n) - 4\,H(2\,n+1)\}$.

11. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$, où f désigne la fonction introduite au début de la partie I, question 2.

La constante d'Euler, qui permet d'obtenir un équivalent des sommes partielles de la série harmonique, est très utile pour calculer explicitement des sommes de séries, comme cela est fait au cours de la première partie du problème. Elle peut s'exprimer en fonction d'une intégrale généralisée faisant intervenir la partie fractionnaire, comme cela est étudié au cours de la seconde partie.

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1014 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt