Banque PT, France

Session 2026, filière PT

Mathématiques C

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Préambule : fonctions rationnelles et développements limités
- Partie I : la série des ln(1 + (-1)^n/n)
- Partie II : intégrales à paramètre G_n(x)
- Partie III : une fonction de deux variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/banque-pt/pt/2026/maths-c

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Tournez la page S.V.P

Préambule

Dans ce qui suit, t_0 désigne un réel strictement positif.

1. Soient f et g les fonctions qui, à tout réel $t \neq t_0$, associent respectivement :

$$f(t) = \frac{t}{t_0 - t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t}$$

   Donner le domaine de dérivabilité de f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident. Il est demandé d'expliciter ces dérivées.

2. Donner le tableau de variations de f sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0.

4. Tracer, sur la feuille de papier millimétrée fournie, la tangente T et l'allure du graphe de f sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, pour la valeur $t_0 = 1$, à l'échelle : une unité pour un cm.

5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la fonction f est n fois dérivable sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, et donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{ième}$, $f^{(n)}$, sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

6. Déterminer une primitive G de g sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, puis une primitive F de f sur $]-\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Enoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur I (on précisera dans la réponse les conditions de régularité vérifiées par ψ).

8. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$, dont on aura, au préalable, rappelé le domaine de définition. Il est demandé de détailler la réponse.

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$, dont on aura aussi, au préalable, rappelé le domaine de définition.

Partie I

1. Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^\star$ une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t + t^2}$$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$, puis la calculer.
3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = -n \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\,t)\,dt}{n + \cos(n\,t)} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

5. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, et λ un réel. Montrer que $\sum (a_n + \lambda\, b_n)$ est une série convergente.

6. Etudier la convergence et la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la question 3.).

Indication : on pourra poser, lorsque l'entier n tend vers l'infini : $h = \dfrac{1}{n}$, et utiliser un développement limité en h.

7. Pour tout entier naturel $N \geq 2$, on pose :

$$S_N = \sum_{k=2}^{N} u_k$$

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$S_{2\,N} = \ln \frac{2\,N + 1}{2\,N}$$

(b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, comparer $u_{2\,n+1}$ et $u_{2\,n}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$, $S_{2\,N-1}$.

(d) Calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$$

Tournez la page S.V.P.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel $x > 1$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-n\,t}\, t^n\, dt$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel non nul n. Etudier, pour tout réel $x > 1$, la convergence de l'intégrale $G_n(x)$.

2. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

3. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé.
   Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, puis exprimer, pour tout $x \geq a$, $G_n'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x)$$

   (On pourra commencer par utiliser le changement de variable $u = \dfrac{(n+1)\,t}{n}$.)

5. Soit $x > 1$. Que vaut $G_1(x)$?

6. Exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n, $G_n(x)$ en fonction de n. On pensera à faire intervenir des produits successifs (aussi appelés *en cascade*). Une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence est attendue.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n\, G_n(x)}{(n-1)\,!}$, puis, lorsque cette condition est vérifiée, calculer sa somme $S(x)$.

8. Soit $N \geq 2$. On pose :

$$\Pi_N = e \prod_{k=2}^{2\,N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$$

   Calculer :

$$\lim_{N \to +\infty} G_n\left(\Pi_N\right)$$

Partie III

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on pose :

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \ln|x - y|$$

1. Exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction φ.
2. Montrer que la fonction φ admet un point critique en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

3. Quelles sont les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la question 2 ?
4. Montrer que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction φ admet un minimum local en (x_0, y_0).
5. En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} \left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \right| = \mathcal{O}(N)$$

En déduire que la minoration de la fonction φ obtenue à la question 4. n'est pas suffisante pour étudier la convergence de la série de terme général $\left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \right|$.

Dans ce problème, un peu éclectique, on s'intéresse à divers types de convergence : de séries entières, de séries, de combinaisons linéaires de séries, d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Un détour par des fonctions de deux variables montre que le calcul différentiel peut, aussi, être utilisé pour obtenir des estimations de sommes partielles, tout en gardant à l'esprit que cela ne permet pas toujours d'obtenir des estimations optimales.

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1047 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Dérivabilité et convexité
- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/banque-pt/pt