Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1980, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Ce que traite le sujet

- Première partie : polynômes T_n
- Deuxième partie : interpolation de Hermite
- Troisième partie : reste de l'interpolation
- Quatrième partie : valeur approchée de l'intégrale

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie d'un recueil de sujets, avec numérotation manuscrite ajoutée en marge ; l'énoncé n'est pas touché.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1980/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

Composition de Mathématiques

1re EPREUVE

Dans tout le problème on désigne par n un naturel strictement positif, par I l'intervalle $[-1, +1]$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour $x \in I$, on pose $T_0(x) = 1$ et $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)$.

1° Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

Prouver que T_n est un polynôme en x de degré n et calculer le coefficient de x^n. (On pourra poser $x = \cos\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$).

2° Montrer que T_n, $n \in N^*$, admet exactement n racines réelles, distinctes, toutes dans l'intervalle I. On les note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en les classant par valeurs décroissantes. Expliciter x_j en fonction de l'angle $(\frac{2j-1}{n})\pi$.

3° Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur I.

a) Montrer que, pour tout $f \in E$, l'intégrale $\mathbf{J}(f) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ existe.

b) Calculer, à l'aide du changement de variable $x = \cos t$, les intégrales suivantes : $\mathbf{J}(1)$, $\mathbf{J}(T_n^2)$, $\mathbf{J}(T_n \cdot T_m)$ avec $m \neq n$.

c) Vérifier, rapidement, que les polynômes $T_0, T_1, \ldots, T_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n.

En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathbf{J}(T_n \cdot P) = 0$. Que vaut $\mathbf{J}(T_n \cdot P)$ si P est de degré n ?

DEUXIÈME PARTIE

On se donne dans cette partie n nombres réels distincts de I : $x_1, \ldots, x_n$.

On pose, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k}\right)$ et on note L_j' le polynôme dérivé de L_j. $\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (a_k)\right.$ désigne le produit des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ excepté $\left.a_j\right)$.

1° Calculer, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$, le nombre réel $L_j(x_i)$.

2° Soit F l'application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $F(P) = (P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$. (On note P' le polynôme dérivé de P).

a) Vérifier que F est linéaire.

b) Montrer que le noyau de F est réduit au polynôme nul.

c) En déduire que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3° Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Utiliser la question précédente pour prouver qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus $2n-1$, que l'on note $\tilde{f}$, tel que :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tilde{f}(x_j) = f(x_j) \text{ et } \tilde{f}'(x_j) = f'(x_j).$$

4° Vérifier que :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x) + \sum_{j=1}^{n} [f'(x_j) - 2 f(x_j) L_j'(x_j)] (x - x_j) L_j^2(x).$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie f est une fonction numérique 2 n fois dérivable sur I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n points donnés distincts de I.

1° On suppose que f s'annule ainsi que sa dérivée f' en chacun des x_i. On se donne $x \in I$ *distinct* des x_i et on définit une fonction φ par :

$\varphi(t) = f(t) - A(t-x_1)^2 (t-x_2)^2 \ldots (t-x_n)^2$ où la constante réelle A est déterminée par la condition $\varphi(x) = 0$.

a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que la dérivée φ' s'annule en au moins 2n points distincts de I.

b) En déduire que chaque dérivée d'ordre p, $\varphi^{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2n$, s'annule en au moins $2n - p + 1$ points distincts de I.

c) En déduire qu'il existe au moins un $c \in I$ tel que $f(x) = (x-x_1)^2 \ldots (x-x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$.

d) Est-ce encore vrai si $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

2° On ne suppose plus que f et f' s'annulent nécessairement aux points x_i, et on adopte les notations du 3° de la deuxième partie. Montrer que :

(1) $$\forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \tilde{f}(x) + (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Soit $f : I \to R$, une fonction 2 n fois continûment dérivable sur I.

Dans cette partie, on choisit pour n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, le n-uple constitué des n racines du polynôme T_n.

Pour chaque $x \in I$ on fait choix d'un $c \in I$ satisfaisant à l'égalité (1) du 2° de la troisième partie.

1° Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_j) L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. (On pourra utiliser le 3° c) de la première partie.)

En déduire que $\mathbf{J}(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \mathbf{J}(L_j^2)$.

2° On pose $a_j = \mathbf{J}(L_j^2)$.

Montrer, à l'aide des parties II et III, qu'il existe un réel $d \in I$ tel que :

$$\mathbf{J}(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}.$$

3° On dit que la somme $\sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$, notée $\tilde{\mathbf{J}}(f)$, est une valeur approchée de l'intégrale $\mathbf{J}(f)$.

Montrer que $\tilde{\mathbf{J}}(f) = \mathbf{J}(f)$ si f est un polynôme de degré au plus $2n-1$.

N. B. — On peut démontrer, ce que l'on ne demande pas de faire, que les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont tous égaux à $\frac{\pi}{n}$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Compléments d'algèbre linéaire
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg