Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1981, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie
- Deuxième partie
- Troisième partie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1981/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

MATHEMATIQUES
1ère épreuve

Coefficient 4

Samedi 23 Mai 1981 de 8 heures à 12 heures

Nota : les trois parties sont indépendantes.

1ère partie :

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

si $t \neq 0$ $\qquad f(t) = \frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}$

si $t = 0$ $\qquad f(t) = 1$.

1 - a - Etablir le développement limité de Log $(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 .

b - Montrer que f est continue et dérivable en 0 .

2 - Soit φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(1+t-\frac{1}{1+t}) - \text{Log}(1+t)$.

a - Etablir l'égalité

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \varphi(t) \cdot f(t) \qquad , t \neq 0 .$$

b - En déduire que f' est continue sur $]-1, +\infty[$.

c - Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in]-1, +\infty[$.

d - En déduire :

$$\forall t \in]-1, +\infty[\quad , f(t) \geqslant 1 .$$

3 - Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(nx)^n \cdot n^{1/2}}{n!}$, $n \geqslant 1$.

a - Vérifier, pour $x > 0$, l'égalité $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e.x.f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b - Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$.

c - En déduire les limites des deux suites

$$v_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{n^{1/2}}{n!} ,$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2}\right)^k \cdot \frac{k^{1/2}}{k!} .$$

d - Etablir successivement les inégalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\text{Log}(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} ,$$

$$\text{Log}(f(t)) \leqslant \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6} .$$

e - En utilisant 3-a-, établir la majoration

$$\text{Log}\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leqslant -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12}\,\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{k^3}\right), \quad n \geqslant 2 ,$$

et en déduire que la suite $\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est majorée.

f - En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!}\right)$.

2ème partie :

$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme Q_n de $\mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right].$$

1 - Déterminer le degré de Q_n .

2 - Pour tout entier naturel r , montrer que

$$(1) \qquad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \, C_{2r+1}^{2p+1} \, X^{2r-2p} .$$

3 - a - Déterminer les racines de Q_n . Montrer que ces racines sont réelles.

b - En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

4 - Pour tout entier naturel r , montrer que

$$(2) \qquad Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^{r} \left(X^2 - \text{cotg}^2 \frac{k\pi}{2r+1}\right) .$$

5 - En utilisant (1) et (2) , établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r\,(2r-1)}{3}$$

(on calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r}).

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3} .$$

6 - a - Pour tout x de $]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$, établir les inégalités

$$\operatorname{cotg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} .$$

b - En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$.

c - Montrer que la série numérique de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

3ème partie :

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1 , on pose

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt .$$

1 - Montrer que F_n est définie et continue sur $]-1\,,+\infty\,[$. Etudier son sens de variation.

Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.

2 - Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que

$$\forall\, t \in [0\,,\,x]\,,\ \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

(on pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$) .

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

3 - Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que

$$\forall t \in [x\,,\,0]\,,\ \left|\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\right| \leqslant 2\,\left|\frac{x}{1+x}\right|^n .$$

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Polynômes
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg