Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1983, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I
- Partie II
- Partie III

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1983/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1983

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 20 Mai 1983 de 8 heures à 12 heures

Nota : la partie I est complètement indépendante des parties II et III.

Les parties II et III sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

On considère les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\, dx\,, \; p \in \mathbb{N}\,.$$

1 - **Étude de I_p .**

a - Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant M\,,\; x^p\, e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}\,,$$

et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

b - Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p , puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2 - **Étude de J_p .**

a - Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^*$.

b - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \forall x > 0,\; \frac{x^p}{e^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}\,.$$

c - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x^p\, e^{-kx}\, dx\,.$$

.../...

d - Montrer que, pour $x \geqslant 0$,

$e^x - 1 \geqslant x$,

puis que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$,

$$0 \leqslant \int_0^A \frac{x^p . e^{-nx}}{e^x - 1} \, dx \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p} .$$

e - En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leqslant \frac{(p+1)!}{n^p} .$$

3 - Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{p+1}}$.

Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p .

PARTIE II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie

$$(1) \quad \begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} \end{cases} , n \in \mathbb{N} .$$

1 - Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.

2 - a - Montrer que la suite (u_n) est monotone pour $n \geqslant 1$ et convergente.

b - Déterminer la limite de cette suite.

3 - On considère la série numérique de terme général $v_n = -1 + u_n$.

a - Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

b - En déduire que la suite (P_n) définie par

$$(2) \quad P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

est convergente. (Ne pas essayer de calculer sa limite).

PARTIE III

1 - A tout couple (a , b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n . b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} , n \in \mathbb{N} .$$

.../...

a - Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0$, $b \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, $b = 0$.

b - Montrer que $a_n \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geqslant 1$.

c - En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite qui est fonction de (a , b) , et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathscr{L}(a, b)$.

d - Montrer que, pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$:

(4) $\mathscr{L}(a, b) = \mathscr{L}(b, a)$

(5) $\mathscr{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathscr{L}(a, b)$

(6) $\sqrt{ab} \leqslant \mathscr{L}(a, b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$.

2 - On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction

$F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \mathscr{L}(1, x)$.

a - Calculer F (0) et F (1) .

Montrer que F est positive et croissante.

b - Montrer que, pour $x > 0$:

(7) $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$

(8) $F(x) = x\, F\left(\frac{1}{x}\right)$

(9) $F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$

(10) $F(x) = \frac{1}{2}(1+x)\, F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

3 - En utilisant les résultats de 2 -

a - Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de F' (1) .

b - Montrer que F (x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c - Montrer que F est continue en 0 . Est-elle dérivable en ce point ?

d - Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{F(x)}{x}$ et $\frac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

4 - Pour $x > 0$, exprimer P_n , défini par (1) et (2), en fonction de F (x) et F (u_{n+1}) .

Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de F (x) .

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg