Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1985, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, partie I
- Premier problème, partie II
- Premier problème, partie III
- Deuxième problème, partie I
- Deuxième problème, partie II

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1985/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1985

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 17 mai 1985 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– les deux problèmes sont indépendants.
– $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

Soient p un entier naturel $\geqslant 2$, et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p (on convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$). On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

PARTIE I

1. a. Vérifier que Δ est une application linéaire.

   b. Quel est le noyau de Δ ?

   c. Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$.

2. On définit les polynômes P_n pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier n tel que } 1 \leqslant n \leqslant p : \Delta P_n = P_{n-1} \text{ et } P_n(0) = 0. \end{cases}$$

   a. Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.

   b. Montrer que la famille $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n P_n \quad \text{avec } \alpha_n = (\Delta^n P)(0)$$

   où $\Delta^0 = Id_{\mathbb{R}_p[X]}$ et, pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant p$, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

PARTIE II

1. Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant p$.

   a. Montrer que $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X(X-1)\ldots(X-n+1)$.

b. Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P_n(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

c. Prouver, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$: $\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^{p} C_n^k (-1)^{n-k} P(X+k)$.

2. Démontrer que, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

(II) Pour tout k de $\mathbb{Z}$, P(k) est dans $\mathbb{Z}$.

PARTIE III

1. a. Écrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$.

b. Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.

2. a. Quelles sont les valeurs propres de M ?

b. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout ce problème, on désigne par f la fonction définie par

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et par C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1. a. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

b. Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut f'(0) ?

c. Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

a. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3. a. Exprimer f'(x) en fonction de h(x), pour $x \in \mathbb{R}_*^+$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$.

c. Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé. On donnera une valeur approchée des extremums de f à 10^{-1} près.

PARTIE II

1. a. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\, dx$ converge.

   b. Calculer $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\, dx$.

2. a. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

   On notera $I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

   b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

   $f_n(x) = f(x)\, e^{-2nx}$.

   Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera

   $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

3. a. Montrer qu'on peut écrire $\dfrac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes.

   b. Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que

   $$I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i+1) + I_n.$$

4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On remarque que

   $$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

   a. On considère la fonction φ définie sur [0,1] par

   $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

   $$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Montrer que $0{,}4 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$, puis montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

   $$\int_0^1 f_n(x)\, dx \leqslant 2{,}5 \int_0^1 x\, e^{-(2n+1)x}\, dx \leqslant \frac{2{,}5}{2n+1}.$$

   b. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[1,+\infty[$, on a $0{,}8 \leqslant 1 - e^{-2x} \leqslant 1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

   $$\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-(2n+1)x}\, dx \leqslant \frac{2}{2n+1},$$

   et en déduire une majoration de $\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

   c. Conclure.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg