Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1985, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : approximation de f par une fonction affine par morceaux
- Partie II : algorithme de résolution d'un système linéaire
- Partie III : obtention de valeurs approchées de f aux points t_k

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie d'un recueil de sujets, avec numérotation ajoutée en marge haute ; l'énoncé n'est pas touché.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1985/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Vendredi 10 Mai 1985, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Les parties I et II sont indépendantes.

On désigne par a et b des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervelle [0, 1]. On suppose que, pour tout élément t de [0, 1], $a(t) \geqslant 0$.
L'objet du problème est d'étudier un procédé d'approximation d'une fonction f à valeurs réelles de classe C^4 sur [0, 1], sachant que, pour tout élément t de [0, 1],

$$f''(t) - a(t)f(t) = b(t),$$

et:

$$f(0) = \lambda,\ f(1) = \mu,$$

où λ et μ sont des nombres réels donnés.
À cet effet, on introduit une subdivision $(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})$ à pas constant $h = 1/(n+1)$ de l'intervalle [0, 1], où n est un nombre entier strictement supérieur à 2. Autrement dit, pour tout nombre entier naturel k tel que $k \leqslant n+1$, $t_k = kh$.
Dans la partie I, on montre que, pour approcher f sur [0, 1], il suffit de connaître une valeur approchée u_k de $f(t_k)$ en chaque point t_k. Les parties II et III décrivent un algorithme de construction des valeurs approchées u_k.
Pour toute fonction g à valeurs réelles de classe C^p sur l'intervalle [0, 1], on pose:

$$M_p(g) = \sup_{t \in [0,\,1]} |g^{(p)}(t)|.$$

I. *Approximation de f par une fonction affine par morceaux.*
1. Soient g une fonction à valeurs réelles de classe C^2 sur [0, 1] et (α, β) un couple d'éléments de [0, 1] tel que $\alpha < \beta$. On suppose que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
a) Soit G la fonction définie sur [0, 1] par les relations:

$$G(t) = \frac{g(t)}{t - \alpha} \quad \text{si } t \neq \alpha \qquad \text{et} \qquad G(\alpha) = g'(\alpha).$$

Prouver que G est continue, puis qu'elle est de classe C^1.
Prouver que, pour tout élément t de [0, 1],

$$|G'(t)| \leqslant \frac{1}{2} M_2(g).$$

b) En conclure que, pour tout élément t de [0, 1],

$$|g(t)| \leqslant \frac{1}{2}|(t - \alpha)(t - \beta)|\, M_2(g).$$

2. Soit ψ_h la fonction définie sur [0, 1] par les conditions suivantes:
— pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\psi_h(t_k) = f(t_k)$;
— pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de ψ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément t de [0, 1],

$$|f(t) - \psi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f).$$

3. Soient enfin $(u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})$ une suite de nombres réels et φ_h la fonction définie sur [0, 1] par les conditions suivantes:
— pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\varphi_h(t_k) = u_k$;
— pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de φ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément t de [0, 1],

$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f) + \delta_h, \text{ où } \delta_h = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |f(t_k) - u_k|.$$

II. *Algorithme de résolution d'un système linéaire.*
Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des suites de nombres réels. On suppose que, pour tout entier k appartenant à $[1, n]$, $a_k \geqslant 2$. On considère le système d'équations linéaires:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + a_2 u_2 - u_3 = b_2 \\ -u_2 + a_3 u_3 - u_4 = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -u_{n-2} + a_{n-1} u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_n u_n = b_n \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut construire une suite $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de nombres réels appartenant à l'intervalle]0, 1], satisfaisant à la condition initiale $c_1 = \frac{1}{a_1}$ et à la relation de récurrence:

$$c_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - c_k} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

2. Soit $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $d_1 = b_1 c_1$ et la relation de récurrence:

$$d_{k+1} = (b_{k+1} + d_k) c_{k+1} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Montrer que le système (1) admet une solution et une seule, et que celle-ci est déterminée par les relations:

$$u_n = d_n$$
$$u_k = d_k + c_k u_{k+1} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

3. Montrer que si les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont positifs (au sens large), il en est de même pour les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

5. Dans le cas général, montrer que:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2 \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k|.$$

III. *Obtention de valeurs approchées de f aux points* t_k.

1. Soit t un nombre réel tel que $[t - h, t + h]$ soit contenu dans [0, 1]. Montrer que:

$$|f(t + h) + f(t - h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

À cet effet, on pourra introduire la fonction auxiliaire F définie sur l'intervalle $[-h, h]$ par la relation:

$$F(x) = f(t + x) + f(t - x) - 2f(t) - x^2 f''(t).$$

On calculera les dérivées successives de F jusqu'à l'ordre 3 et en particulier leurs valeurs à l'origine, et on majorera $|F'''(x)|$ à l'aide de $M_4(f)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

(2)

$$-f(t_{k-1}) + [2 + h^2 a(t_k)] f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k, \qquad \text{où } |\varepsilon_k| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

3. On connaît déjà $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$. Pour approcher $f(t_1)$, $f(t_2)$, ..., $f(t_n)$, on remplace les relations (2) par le système linéaire:

(3) $$-u_{k-1} + [2 + h^2 a(t_k)] u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$u_0 = \lambda \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \mu.$$

Montrer comment, à l'aide de la partie II, on peut construire la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$.

4. Cette suite étant ainsi définie, établir que:

$$\delta_k \leqslant \frac{h^2}{24} M_4(f).$$

En conclure que, pour tout élément t de [0, 1],

$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant A h^2, \text{ où } A = \frac{1}{8} M_2(f) + \frac{1}{24} M_4(f).$$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg