Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1986, filière ECG

Mathématiques 2 approfondies ESCP-HEC

Ce que traite le sujet

- Problème, première partie : tests par tirages de paquets de circuits, avec remise
- Problème, deuxième partie : étude du nombre de tests nécessaires

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Photocopie du sujet sans page de couverture ni en-tête du concours, avec une mention manuscrite « HEC 1986 II » ; la session est confirmée par les éléments de correction HEC 86 du même dossier, la durée n'apparaît pas.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1986/maths-appro-2-escp-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

PROBLÈME

L' objet du problème est de décrire et comparer deux méthodes de détection de pannes. On se place dans la situation suivante : on considère un ordinateur comprenant un ensemble C de n circuits intégrés, où $n \geqslant 2$, et on suppose qu'une panne a endommagé un circuit et un seul. On note $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ces circuits, où c_n est le circuit défectueux.

Dans la partie I, on étudie une méthode de tests par paquets quelconques de circuits. Dans la partie II, on évalue l'espérance du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne par cette méthode et on compare celle-ci avec une méthode de tests où les circuits sont pris un à un.

I. Tests par tirages de paquets de circuits, avec remise

On note Ω l'ensemble des parties de C. On tire au hasard et de façon équiprobable, par un procédé adéquat, des parties de C, c'est-à-dire des éléments de Ω (y compris la partie vide). Pour tout élément G de Ω, on note $\bar{G}$ le complémentaire de G dans C.

1. Soit A une partie de C de cardinal r, où $0 \leqslant r \leqslant n$.

a) Déterminer le nombre de parties de C ne rencontrant pas A.

b) Déterminer le nombre de parties de C contenant A.

2. On tire un élément G de Ω.

a) Calculer la probabilité d'obtenir une partie donnée B de C.

b) Soit A une partie de C de cardinal r, où $0 \leqslant r \leqslant n$. Calculer la probabilité pour que G contienne A.

c) Soit c_j un élément de C distinct de c_n. On suppose que c_n appartient à G; calculer la probabilité conditionnelle pour que c_j appartienne à G.

3. Soit Ω_n l'ensemble de parties de C contenant l'élément c_n. Soit h un nombre entier naturel non nul. On tire, successivement et avec remise, h éléments $B_1, B_2, \ldots, B_h$ de Ω. Une technique permet de tester un ensemble de circuits et de savoir si le circuit défectueux se trouve parmi eux. Pour chaque entier i appartenant à l'intervalle $[1, h]$, on teste le paquet B_i. On pose $G_i = B_i$ si B_i contient le circuit défectueux ; dans le cas contraire, on pose $G_i = \bar{B}_i$. Ainsi, G_i est un élément de Ω_n. On désigne enfin par D_h l'intersection des parties G_i.

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel j tel que $1 \leqslant j \leqslant n-1$, la probabilité pour que c_j appartienne à D_h est égale à $\dfrac{1}{2^h}$.

b) Plus généralement, soit E une partie de C de cardinal r ne contenant pas l'élément c_n. Calculer la probabilité pour que D_h contienne E.

c) En déduire que les événements $c_j \in D_h$, où $1 \leqslant j \leqslant n-1$, sont mutuellement indépendants et qu'il en est de même pour les événements $c_j \notin D_h$.

d) Prouver enfin que :

$$P(D_h = \{c_n\}) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{n-1}$$

II. Étude du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne

1. Pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}.$$

a) Montrer que l'application qui à tout nombre entier naturel non nul k associe $a_{k-1} - a_k$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition associée à cette loi ; construire sa courbe représentative lorsque $n = 3$.

2. On conserve la procédure de la question I. 3, mais le nombre de tirages n' est pas fixé ; pour tout nombre entier naturel non nul k, on note D_k l'intersection des parties $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

On considère une variable aléatoire X_n, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui prend la valeur 1 si l'événement $D_1 = \{c_n\}$ est réalisé, la valeur k, où $k \geqslant 2$, si l'événement $D_k = \{c_n\}$ est réalisé et si l'événement $D_{k-1} = \{c_n\}$ ne l'est pas.

(Une telle variable aléatoire représente donc le nombre de tests nécessaires pour détecter le circuit défectueux.)

a) Pour tout nombre entier naturel non nul k, calculer la probabilité de l'événement $X_n \leqslant k$.

b) En déduire que la loi de probabilité de X_n est celle qui a été définie dans la question 1. *a*).

3. *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul s fixé, la série de terme général $\left(\frac{1}{2^{ks}}\right)$ est convergente.

En déduire que la série de terme général (a_k) est convergente.

b) Montrer que la variable aléatoire X_n admet une espérance et que :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

À cet effet, on pourra calculer :

$$\lim_{q \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{q} k\,(a_{k-1} - a_k) - \sum_{k=0}^{q-1} a_k \right).$$

4. On se propose d'évaluer $E(X_n)$ en comparant la série de terme général (a_k) à une intégrale. À cet effet, pour tout nombre entier naturel non nul p, on pose :

$$I_p(x) = \int_0^x f_p(t)\,dt, \quad \text{où } f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p.$$

a) Montrer que l'intégrale $I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t)\,dt$ est convergente.

(On pourra développer $(1 - e^{-t})^p$.)

b) Calculer une primitive de la fonction $f_{p+1}-f_p$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire la valeur de $I_{p+1}-I_p$. Montrer finalement que :

$$I_{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

c) Montrer que, pour tout nombre entier naturel $m \geqslant 2$:

$$\int_m^{m+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{m}\leqslant\int_{m-1}^{m}\frac{dt}{t}.$$

En déduire que :

$$\ln n\leqslant I_{n-1}\leqslant 1+\ln(n-1).$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n-1}}{\ln n}$.

d) Soit g_n la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$g_n(u)=1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{n-1}.$$

En étudiant la variation de g_n, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul k :

$$a_k\leqslant\int_{k-1}^{k}g_n(u)\,du\leqslant a_{k-1}.$$

e) Montrer que, pour tout nombre entier naturel $q \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{q}a_k\leqslant\int_0^q g_n(u)\,du\leqslant\sum_{k=0}^{q-1}a_k.$$

En effectuant le changement de variable $t=u\ln 2$ dans cette intégrale et en passant à la limite dans l'encadrement précédent lorsque q tend vers $+\infty$, montrer que :

$$E(X_n)-1\leqslant\frac{I_{n-1}}{\ln 2}\leqslant E(X_n).$$

f) Déduire des résultats des questions *c*) et *e*) un encadrement de $E(X_n)$ et déterminer la limite de $\dfrac{E(X_n)}{\ln n}\ln 2$.

5. On teste maintenant les circuits c_j un par un, en les tirant de manière équiprobable et sans remise. On désigne par Y_n le nombre de tests nécessaires pour détecter le circuit défectueux.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n.

b) Calculer l'espérance de Y_n.

6. *a*) Calculer la limite de $\dfrac{E(X_n)}{E(Y_n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Grâce à l'encadrement obtenu dans la question 4.*f*), comparer $E(X_n)$ et $E(Y_n)$ lorsque $n=100$, puis lorsque $n=1\,000$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Probabilités sur un univers fini
- Logique, ensembles et applications
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg