Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1986, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, partie I
- Premier problème, partie II
- Deuxième problème, partie I
- Deuxième problème, partie II
- Deuxième problème, partie III

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1986/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1986

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 2 mai 1986 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– les deux problèmes sont indépendants .

– IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

PARTIE I

1. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre le système à 5 équations (I), d'inconnue $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$:

$$(I)\begin{cases} -sx + y = 0 \\ x - sy + z = 0 \\ y - sz + t = 0 \\ z - st + u = 0 \\ t - su = 0 \end{cases}$$

(Il est conseillé de prendre u comme inconnue auxiliaire).

2. A quelle condition, portant sur s, ce système admet-il une autre solution que l'élément nul de $\mathbb{R}^5$?

PARTIE II

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, et $s \in \mathbb{R}$ fixés, on se propose de résoudre le système à n équations (II), d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(II)\begin{cases} -sx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - sx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - sx_3 + x_4 = 0 \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ x_{n-2} - sx_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - sx_n = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ tels que pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, on ait $x_{n-p} = A_p(s)\, x_n$, et montrer, pour tout $p \in \{1, \ldots, n-3\}$,

$$A_{p+2}(s) = sA_{p+1}(s) - A_p(s)$$

2. On définit un polynôme A_n par la relation

$A_n(s) = sA_{n-1}(s) - A_{n-2}(s)$

Prouver que le système (II) possède des solutions autres que l'élément nul de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $A_n(s) = 0$.

3. Déterminer :

a. Le degré de A_n ;

b. Le coefficient du terme de plus haut degré de A_n ;

c. Le terme de degré 0 de A_n ;

d. La parité de A_n ;

e. Le coefficient de s^{n-2} dans $A_n(s)$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on définit les fonctions P_n et Q_n par :

$$P_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto P_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant n, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

$$Q_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto Q_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a. Étudier les fonctions P_1, P_2 et P_3 d'une part, Q_1, Q_2 et Q_3 d'autre part. Tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à 4 cm. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on notera par C_i la courbe représentative de P_i, et par Γ_i celle de Q_i. On tracera enfin sur le même graphique la courbe E représentative de la fonction e^{-x}.

b. Montrer que la fonction P_n est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $P_n^{(n)}$. La fonction P_n est-elle de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$?

2. a. Soit φ_1 la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\varphi_1(t) = \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \ln(1-t) - 1 + \frac{1}{1-t}$$

Montrer que $\varphi_1 \geqslant 0$ (on pourra étudier les variations de φ_1), et en déduire les variations de la fonction Ψ_1 définie sur $]0,1[$ par $\Psi_1(t) = \frac{1}{t}\ln(1-t)$.

b. Soit φ_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi_2(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t}$.

Montrer que $\varphi_2 \geqslant 0$ (on pourra étudier les variations de φ_2), et en déduire les variations de la fonction Ψ_2 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Psi_2(t) = -\frac{1}{t}\ln(1+t)$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on a :

$$P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant Q_{n+1}(x) \leqslant Q_n(x).$$

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Quelle est la limite des suites de terme général $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, étudier l'existence des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} P_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} Q_n(x)\,dx.$$

Lorsqu'elles existent on note $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x)\,dx$.

Calculer I_n et J_n. Quelle est la limite des suites de terme général I_n et J_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

PARTIE II

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-x} - P_4(x)$$

$$g : [0,4[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + 3 \ln\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Établir qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1,4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

3. En déduire les variations de la fonction f.

4. a. Montrer que l'on a l'encadrement : $1,8 < \alpha < 1,9$.

b. Calculer une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

PARTIE III

On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

1. Montrer l'existence de cette intégrale. On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

Montrer que $I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4}\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

2. a. En utilisant la question 4. b de la partie II, montrer :

$\forall x \in [0,\sqrt{2}]$, $0 \leqslant e^{-x^4} - P_4(x^4) \leqslant 0,08$.

b. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} P_4(x^4)\,dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$), et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

c. En déduire l'encadrement : $0{,}87 \leqslant \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4}\,dx \leqslant 1$

3. a. Montrer : $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx \leqslant \frac{1}{4^{7/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y}\,dy$ (on pourra effectuer le changement de variable $y = x^4$).

b. En déduire une valeur décimale approchée de $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$ à 10^{-2} près.

4. Conclure.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Polynômes
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg