Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1987, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème, partie I
- Deuxième problème, partie II

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1987/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 15 mai 1987 de 14 heures à 18 heures

Nota :

— Les deux problèmes sont indépendants.

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

On désigne par $\mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Quelle est la dimension de E ?

2. On note u l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$, associe le polynôme u(P) défini par

$$u(P) = X\,(P' + P'(0)) - 2\,(P - P(0)).$$

Vérifier que u est une application linéaire.

Pour P élément de $\mathbb{R}_5[X]$, calculer u(P) ; en déduire le noyau, l'image, les valeurs propres et vecteurs propres de l'application u.

Montrer que u est diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$f_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \,. \end{cases}$$

(N.B. ln désigne le logarithme népérien)

On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1. a) Quel est le développement limité de la fonction $x \longmapsto \ell n\,(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?

   b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0, puis de f_n , $n \geqslant 1$.

   c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1. Que vaut $f'_n(1)$?

   d) Préciser la position de C_n par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et calculer $f'_n(x)$.

   b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, f_n est prolongeable par continuité en 0. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?

3. a) Étudier la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi_0(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\,\ell n\,x$. Quel est le signe de $f'_0(x)$?

   b) En déduire les variations de la fonction f_0, et tracer C_0, l'unité étant prise égale à 5 cm.

4. a) Étudier les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ respectivement par $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ell n x$ et $\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2\,\ell n x$.

   b) En déduire les variations des fonctions f_1 et f_2, et tracer C_1 et C_2 sur le même graphique que C_0.

PARTIE II

On admettra que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et que sa somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

1. a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est intégrable sur le segment $[0,1]$.

   b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x))dx$ est convergente.

   On note $a_1 = \displaystyle\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x))dx$. Calculer a_1.

   c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)dx$ est convergente.

   On note $I = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)dx$. Le but de cette partie est de calculer I .

2. a) Pour $n \geqslant 2$, calculer

$$a_n = \int_0^1 (f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x))dx$$

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente.

3. a) Établir, en utilisant l'étude de f_1 effectuée à la partie I, que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^{n-1}}{2}$. En déduire que $\int_0^1 f_n(x)dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) On note $S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$. Montrer que $I = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

4. a) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

c) Calculer I.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg