Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1988, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1988/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1988

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 13 mai 1988 de 14 heures à 18 heures

Nota :
– Les deux problèmes sont indépendants.
IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

On note n un entier naturel, $n \geqslant 2$, $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.

   b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.

   a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.

   b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.

   c) Montrer que f est diagonalisable.

DEUXIÈME PROBLÈME

N.B. : les questions 4., 5. et 6. sont indépendantes de la question 3.

Pour tout n de IN*, on considère la fonction f_n définie sur IR^+ par

$$\begin{cases} f_n(x) = e^{-n\left(x + \frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1. Exprimer f_n en fonction de f_1. Montrer que f_1 est dérivable sur IR^+.

2. Étudier les variations de f_n. Tracer approximativement la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé et la situer par rapport à celle de f_{n+1}.
   Montrer que, pour tout x de IR^+, $f_n(x) \leqslant e^{-2n}$.

3. a) Montrer que, pour tout $a \neq 0$, l'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = a(x - 1)$$
   admet une unique solution notée u_n.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 1.
   c) L'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = \frac{1}{n}(x - 1)$$
   admet une unique solution notée v_n.
   Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$.
   d) Quelle est la pente a_n de la droite joignant le point A (1,0) au point $M_n(n, f_n(n))$?
   Montrer que cette pente vérifie l'inégalité $a_n > \frac{e^{-n^2}}{n^2}$ quelque soit $n \in IN^*$.
   L'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = \frac{e^{-n^2}}{n^2}(x - 1)$$
   admet une unique solution notée w_n. Montrer que $n < w_n$, et en déduire la limite de w_n, lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ fixé, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.
   Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ de cette série.

5. Pour tout n de IN*, on considère la fonction F_n définie sur IR^+ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.
   On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.
   a) Démontrer que la fonction F_n est dérivable. Étudier le sens de variation de F_n.
   b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f_n(x) < e^{-nx}$.
   En déduire que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.
   Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.

6. Montrer que les séries de termes généraux
   $$J_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt \text{ et } I_n \text{ sont convergentes.}$$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg