Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1988, filière ECG

Mathématiques I ESSEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : fonctions associées à x -> x^2
- Partie II : fonctions associées à l'exponentielle
- Partie III : fonctions associées à 1/(1+x)
- Partie IV : convergence de la suite (f_n) vers f

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Copie scannée de l'original portant le tampon de l'école avec une signature manuscrite en marge de la page 1.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1988/maths-s-essec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Vald'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

MATHEMATIQUES I

Option générale
Lundi 9 mai 1988 de 14h à 18h

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur [0,1] par des fonctions polynômes.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Notations:

On associe, à tout entier naturel n non nul et à toute fonction numérique f continue sur [0,1] , la fonction polynôme, notée f_n, définie par :

(1) $\forall x \in [0, 1] \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

Rappel:

Soit h une fonction numérique définie sur [0,1]. S'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \qquad |h(x) - h(x')| \leq k|x - x'|$$

on dit que h est k-Lipschitzienne sur [0,1].

I - Etude des fonctions f_n associées à f : $x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme f_n associée à f par (1) dans les deux cas particuliers suivants:

   a) $\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = 1$,
   b) $\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = x$.

2. f désignant une fonction numérique continue sur $[0,1]$, on note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x f(x)$, f_n et g_n les fonctions respectivement associées à f et g par (1) et f'_n la dérivée de f_n.

Vérifier que:

$$(2) \qquad \forall x \in [0,1] \qquad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x)$$

3. On suppose que

$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) = x^2$.

a) déterminer f_n ,

b) calculer $\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right|$

4. Déduire des résultats précédents que :

$$(3) \qquad \forall x \in [0,1] \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} .$$

II - Etude des fonctions f_n associées à f : $x \mapsto \exp x$.

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp x \end{array} \qquad \text{par la relation (1) .}$$

1. Vérifier que: $\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \left[x (\exp \frac{1}{n} - 1) + 1 \right]^n$.

2. Déterminer, pour tout x de $[0,1]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in]0,1[$.

a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2, en zéro, de :

$u \longmapsto \ln [x (\exp u - 1) + 1]$.

b) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de :

$f_n(x) - \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par :

$$\psi(x) = n \ln \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 \right] - x$$

(On montrera, à l'aide du théorème de Rolle que ψ' possède au moins une racine sur $]0,1[$ et, en calculant ψ', que cette racine x_n est unique).

5. En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \exp x \leq f_n(x) \leq \exp\left[x + \psi(x_n)\right] ,$$

et que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left|f_n(x) - \exp x\right| \leq e\left[\exp(\psi(x_n)) - 1\right].$$

6. Donner, en utilisant un développement limité de $\psi(x_n)$ à un ordre suffisant, un équivalent de $\exp(\psi(x_n)) - 1$ quand $n \to +\infty$.

III - Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$ par la relation (1).

1. Détermination de f_n :

Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f_n(x) = n \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n+k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1} [1 - x(1-u)]^n du .$$

2. Majoration de $|f'_n(x)|$:

a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que:

$$\forall \ (t, t') \in [0, 1]^2 \qquad \left|t^n - t'^n\right| \leq n|t - t'|$$

b) En déduire que:

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \text{ et } \forall u \in [0, 1] \qquad \left|[1 - x(1-u)]^n - [1 - x'(1-u)]^n\right| \leq n(1-u)|x - x'| ,$$

puis que f_n est 1-Lipschitzienne sur [0,1].

c) En déduire un majorant de

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left|f'_n(x)\right| .$$

3. Majoration de $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

a) Utiliser la relation (2) et l'égalité évidente $x f(x) = 1 - f(x)$ pour démontrer que:

$$\forall x \in [0,1] \qquad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - (1+x) f_n(x) .$$

b) En déduire que:

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n} .$$

IV - Convergence de la suite (f_n) vers f sur [0,1] :

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur [0,1] et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, par f_n la fonction polynôme associée à f par (1).

1. Convergence de $\left(\int_0^1 f_n(x)dx \right)_{n \geq 1}$:

a) On note, pour $0 \leq k \leq n$:

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx .$$

Déterminer, pour $0 \leq k \leq n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) Calculer, en fonction de f, $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

2. Etude de $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe C^1 sur [0,1] :

On suppose f de classe C^1 sur [0,1].

a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que f soit k-Lipschitzienne sur [0,1]. En déduire que,
si $M_0(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, on a :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall (x, x') \in [0,1]^2 \quad |f(x') - f(x)| \leq k\alpha + 2\frac{M_0(f)}{\alpha^2}(x' - x)^2 .$$

(on distinguera les 2 cas $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$).

b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2} .$$

d) En déduire l'existence d'un nombre réel positif A tel que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}} .$$

(on pourra étudier, sur $\mathbf{R}^*_+$, la fonction : $\alpha \longmapsto k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}$)

Retrouver ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx .$$

3. <u>Vitesse de convergence de</u> $(f_n)_{n \geq 1}$ <u>vers f si f est de classe</u> C^2 <u>sur</u> [0,1] :

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur [0,1].

a) Démontrer que,
si $M_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$, on a :

$$\forall (x, x') \in [0,1]^2 \quad |f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}(x' - x)^2 .$$

b) En déduire que:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n} ,$$

et montrer, par un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réels, sommes et produits
- Polynômes
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg