Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1989, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, partie A
- Premier problème, partie B
- Deuxième problème, partie I
- Deuxième problème, partie II
- Deuxième problème, partie III

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1989/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Mardi 16 mai 1989 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– Les deux problèmes sont indépendants.

IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

Partie A

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur IR, p et q deux endomorphismes de E tels que : $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p \circ q = q \circ p$. On pose : $f = p + q$, $g = p \circ q$.

1. a) Vérifier $g \circ g = g$

   b) Montrer que les valeurs propres de p et de q sont dans $\{0 ; 1\}$.

   c) Démontrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0 ; 1 ; 2\}$.

2. a) Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0\}$.

   b) Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0\}$.

Partie B

Soient $N \in \text{IN}^*$ et $\text{IR}_N[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes nul ou de degré $\leqslant N$. Pour tout $n \in \text{IN}$ tel que $n \leqslant N$, on note T_n l'application de $\text{IR}_N[X]$ dans $\text{IR}_N[X]$ définie de la façon suivante :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k, \text{ avec } \lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \text{IR}, \text{ alors } T_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k.$$

Ainsi, par exemple, avec $N = 4$: $T_3(X + X^2 + 2X^3 + X^4) = X + X^2 + 2X^3$ et $T_4(X + X^2) = X + X^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \text{IN}$ tel que $n \leqslant N$, T_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\text{IR}_N[X]$.

2. a) Vérifier, pour tout $n \in \text{IN}$ tel que $n \leqslant N$: $T_n \circ T_n = T_n$.

   b) Pour tout $n \in \text{IN}$ tel que $n \leqslant N$, déterminer le noyau et l'image de T_n.

   c) Montrer pour tous n,r de IN tels que $n \leqslant N$ et $r \leqslant N$: $T_n \circ T_r = T_r \circ T_n$.

3. Soient n,r deux entiers naturels tels que $0 < n \leqslant r < N$.

a) Comparer Ker (T_n) et Ker (T_r) ; comparer Im (T_n) et Im (T_r).

b) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de $T_n + T_r$.

c) $T_n + T_r$ est-il diagonalisable ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I

1. Montrer que, pour tout réel x de $]-\infty ; \frac{1}{4}]$, il existe un réel unique y de $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ tel que $x = y - y^2$, et calculer y en fonction de x.

On note f l'application définie par : $f :]-\infty ; \frac{1}{4}] \longrightarrow]-\infty ; \frac{1}{2}]$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$$

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty ; \frac{1}{4}[$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\infty ; \frac{1}{4}[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(1-4x)^{-n+\frac{1}{2}} .$$

Partie II

L'objet de cette partie est de déterminer une approximation de f sur $]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

1. a) Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$: $f(x) = Q_n(x) + R_n(x)$

où $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!} x^k$ et $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

b) Calculer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$

2. a) Pour $x \in [0 ; \frac{1}{4}[$ fixé, quelle est la borne supérieure de l'application

$$[0 ; x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \frac{x-t}{1-4t} \quad ?$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}[$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{(4x)^n}{2\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} .$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\frac{1}{4} ; 0]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(-4x)^n \cdot |x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}} .$$

4. Donner un majorant de $\left| f(x) - Q_n(x) \right|$, indépendant de x pour $x \in]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$, et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

5. a) Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^{-4} (n+1) \sqrt[3]{n}} < 1\right).$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left|R_n\left(-\frac{1}{6}\right)\right| < 10^{-4}\right)$.

Partie III

On étudie dans cette partie une autre méthode d'approximation de f sur $[0 ; \frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} P_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2. \end{cases}$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et de $P_{n+1} - P_n$ sont des entiers naturels.

En déduire que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer (par récurrence sur n) que, pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) \leqslant f(x)$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}]$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg