Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1990, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années : prepahelp.com/annales/bce/ecg/1990/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Lundi 30 avril 1990 de 14 heures à 18 heures

Les deux problèmes sont indépendants.

1er PROBLÈME

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur IR des fonctons polynômiales de dans IR de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier $k \in [0 ; n]$, μ_k est la fonction définie sur IR par : $\forall t \in IR,\ \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [0 ; n]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^k e^t\, dt$ est convergente .

2. Soit f un élément de E. Montrer qu'on peut définir une fonction g de IR dans IR par :

$$\forall x \in IR,\ g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt .$$

Cette fonction g dépend de f et est notée L(f).

3. a. Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$.

b. Montrer que, pour tout entier $k \in [0 ; n-1]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1) L(\mu_k)$.

En déduire $\displaystyle L(\mu_k) = (-1)^k\, k!\, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\, \mu_j$.

c. Montrer que, pour tout élément f de E , L (f) appartient à E.

On considère l'application $L : E \longrightarrow E$.
$f \longmapsto L(f)$

4. a. Montrer que L est une application linéaire et injective.

b. Ecrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \le k \le n}$.

Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} (on pourra utiliser 3. b.).

5. a. Soient λ une valeur propre de L, et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ.
Montrer que λ est non-nul et que, pour tout réel x, $(1 - \lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur IR par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda} x} f(x)$.

Montrer que φ est constante.

b. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L.
Est-ce que L est diagonalisable ?

2ème PROBLÈME

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.
ln désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

PARTIE A. Étude de la suite $(u_n)_{n \ge 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \ge 1} v_n$?

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \ge 1}$ converge.

On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \ge 1}$.

PARTIE B. Expression intégrale de γ.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe,

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) dx$ existe.

2. a. Montrer que, pour tout $t \in]-1 ; +\infty[$: $\ln(1 + t) \le t$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0 ; n], \quad \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \le e^{-x}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0 ; \sqrt{n}[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n\,ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) - ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right).$$

d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0 ; n]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I.

4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ existent et sont égales.

On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_1^n \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J.

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $K_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x}\,dx$ existe.

b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - J_n = K_n - ln\ n$.

b. En déduire $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,dx = \gamma$.

PARTIE C. Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; 1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\,(l+1)} \leq I \leq \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\,(l+1)},$$

puis $\quad -\dfrac{1}{(2n)!\ 2n} \leq I - \sum_{l=0}^{2n-2} \dfrac{(-1)^l}{(l+1)!\ (l+1)} \leq 0$.

c. Donner une valeur approchée de I à $0{,}5.10^{-3}$ près.

2. a. Montrer : $\forall x \in [1\ ;+\infty[\ ,\ 0 \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

b. Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\dfrac{e^{-x_0}}{x_0} < 0{,}25\ .\ 10^{-3}$.

c. On admet que $\displaystyle\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ vaut 0,2193 à $0{,}25\ .\ 10^{-3}$ près .

Donner une valeur approchée de J à $0{,}5.10^{-3}$ près.

d. Conclure.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg