Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1991, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1991/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1991

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 6 mai 1991 de 8 heures à 12 heures

1er PROBLÈME

Notations

$\mathscr{B}$ est la base canonique du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$,

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à $\mathscr{B}$, g est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice relativement à $\mathscr{B}$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note

$M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice relativement à $\mathscr{B}$ est M_A.

Partie A

1. Déterminer les valeurs propres de g et, pour chaque valeur propre de g, déterminer une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable ?

2. Soit $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.

   a. Montrer que f_A est combinaison linéaire de id , g , $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.

   b. En déduire les valeurs propres de f_A .

c. Dans cette question 2-c., et celle-ci seulement, on suppose $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -2$. Déterminer pour chaque valeur propre de f_A la dimension du sous-espace propre associé.

Partie B

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\beta \neq 0$, et $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β) pour qu'il existe $X \in \mathbb{C}^4$ tel que : $f_A(X) = (0, 0, 0, 0)$ et $X \neq (0, 0, 0, 0)$.

2. Trouver quatre nombres complexes α, β, u, v tels que, en notant $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$ et $B = (u, u + v, u + 2v, u + 3v)$, on ait :

$$\beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } M_A M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2ème PROBLÈME

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^3)^n}\, dx$.

I - Calcul de I_1

1. Montrer que l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3}\, dx$ est convergente.

2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1 + x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = ln\,(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3}\ \text{Arc tan}\ \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\ .$$

Calculer la fonction dérivée de f .
En déduire I_1 .

II - Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^3)^n}\, dx$ est convergente .

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$3\,n\,I_{n+1} = (3\,n-1)\,I_n\,.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1.
Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq a\,, \qquad \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n}\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq \frac{1}{3n-1}\,.$$

4. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

III - Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

1. On considère les trois suites définies par :
pour $n \geq 1$, $u_n = n^{1/3} I_n$, $v_n = ln\, u_n$, $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\frac{1}{n}$.

Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif. (On ne cherchera pas à calculer h).

c. Indiquer la nature de la série numérique de terme général I_n .

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1} I_n$ pour $n \geq 1$.

a. La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

b. Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, pour tout entier $n \geq 1$.

Vérifier que $$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \dfrac{1}{1+x^3}} \cdot \frac{1}{1+x^3}\,dx\,.$$

c. Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

d. Soit t un nombre réel strictement positif.
A l'aide d'un changement de variable simple calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+x^3}\,dx$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg