Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1991, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Liminaire
- Partie I : étude de la fonction f_a
- Partie II : calcul approché de phi(a)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1991/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 14 mai 1991, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

PARTIE I

1. *Cas particulier* $a = 0$

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, f_0$ en termes de probabilités.

En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de* f_a

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0,\ +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas* $a > 0$

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0,\ +\infty[$. Calculer $f'_a(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f'_a.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas* $-1 < a < 0$

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0,\ +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

5. *Étude de* f_a *au voisinage de* $+\infty$ $(a > -1)$

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2}\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de :

$$f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}\ f_a(x)$$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x,\ +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité :

$$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$$

e) Déduire également de la question *c*) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 2\ x^{a-3}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose :

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par* φ

a) Établir l'égalité :

$$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\ \varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a + 2\ n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de* $g_a(x)$

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{t^{2k+a}}{2^k\ k\ !}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\ n\ !}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n\ n\ !\ (2\ n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de $\varphi(a)$*

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\ p^{a-3}\ \mathrm{e}^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Variables aléatoires à densité
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg