Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 1993, filière ECG

## Mathématiques approfondies EDHEC

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème, partie 1
- Problème, partie 2

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1993/maths-appro-edhec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

# CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

*MATHEMATIQUES*
OPTION GENERALE

**JEUDI 13 MAI 1993, de 8 h à 12 h**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Sont autorisées :

. Règles graduées

. Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

---

## EXERCICE 1

On rappelle que, pour tout nombre réel $x$ :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

1) On note $\phi$ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1,1] \quad : \qquad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1,1], \quad \phi(t) \in [-1,1]$.

b) Etablir que, pour tout couple $(t,t')$ d'éléments de $[-1,1]$ :

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leqslant 9\,|t - t'|$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad f_n(x) = 3f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4\left(f_{n-1}(\frac{x}{3})\right)^3$$

Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :

function $f$($n$ :integer ;$x$ :real) :real ;

et qui fournit la valeur de $f_n(x)$

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* : \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$$

Que peut-on en conclure ?

## EXERCICE 2

On considère la matrice carrée $A$ d'ordre $n$ à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice $i$ de cette matrice est donc : $\left(\frac{1}{i!} \quad \frac{1}{(i+1)!} \quad \frac{1}{(i+2)!} \quad \cdots \quad \frac{1}{(i+n-1)!}\right)$.

1) On considère un vecteur colonne $X$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad AX = 0$$

On lui associe la fonction polynôme $P$, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$P(t) = \frac{x_1}{n!} + \frac{x_2}{(n+1)!}t + \cdots + \frac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}t^{k-1}$$

a) On pose : $f(t) = t^n P(t)$. Calculer $f(1)$, $f'(1), \cdots, f^{(n-1)}(1)$.

b) En déduire les dérivées successives de $P$ au point 1.

2) Démontrer que $P$ est nul et en déduire que $A$ est inversible.

## EXERCICE 3

Un appareil est constitué de composants électroniques. Lorsque l'un de ceux-ci tombe en panne, il est remplacé immédiatement. Si $n$ est un entier naturel non nul, on note $T_n$ la variable aléatoire égale au temps, compté en semaines, écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la $n$-ième panne survenant à l'emplacement d'un composant donné. Si $t$ est un réel strictement positif, on note $N_t$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes du même composant dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On suppose que $N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t \quad (\lambda > 0)$.

1)a) Comparer les événements : $(T_1 > t)$ et $(N_t = 0)$.

b) Reconnaître la loi de $T_1$.

2)a) Exprimer la probabilité de l'événement $(T_n > t)$ pour $t > 0$.

b) Montrer que $T_n$ est une variable aléatoire à densité, dont on donnera une fonction de densité de probabilité.

3) On considère deux composants identiques au précédent. Etudier la loi de probabilité de $T$, variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la première panne de l'un des deux composants. (On précisera des hypothèses d'indépendance raisonnables que l'on sera amené à faire.)

## PROBLÈME

**Notations.**

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad ; \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$f_n$, $g_n$, les fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}_+$ par les relations :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k}) \quad ; \qquad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$I_n$, $U_n$, $V_n$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad U_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad V_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{H_n}}}^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$E_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à $n-1$.

### PARTIE 1

1)a) La suite de terme général $H_n$ est-elle convergente ? La suite de terme général $S_n$ est-elle convergente ?

b) Pour tout nombre réel positif ou nul $x$, prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \tag{1}$$

c) En appliquant la double inégalité (1) à $x = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, montrer que $H_n \sim \ln(n)$ quand $n$ tend vers l'infini.

2)a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$, pour $x \in \mathbf{R}_+$.

b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x \leqslant U_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x$$

c) En conclure que : $U_n \sim \dfrac{1}{H_n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

d) Montrer de façon analogue les inégalités :

$$0 \leqslant V_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{H_n}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{S_n}{2}}}{H_n}$$

e) Démontrer que $V_n = o(\frac{1}{H_n})$ quand $n$ tend vers l'infini.

3) A l'aide des questions précédentes, établir que : $I_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$ quand $n \to +\infty$.

## PARTIE 2

1) On considère la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'éléments de $E_n$ définie par :

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n : \quad e_k(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)(x+k+1)\ldots(x+n) = \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (x+i)$$

a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de $E_n$.

b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$$

c) Calculer $\lambda_k$ en fonction de $n$ et du coefficient binomial $\mathbf{C}_{n-1}^{k-1}$.

2) Déduire de la question 1 de la partie 2 la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_{n-1}^{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

3) Utiliser cette égalité et l'équivalent de $I_n$ obtenu dans la partie 1 pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_n^k \ln(k+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$$

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Polynômes
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Réels, sommes et produits

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg