Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1993, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2, parties I et II
- Problème 2, partie III

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1993/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1993

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 10 mai 1993 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées:

–. Règles graduées.
–. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

I. Soit E un espace vectoriel réel ; on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, O l'endomorphisme nul de E, e l' endomorphisme identité de E.

Pour tout φ de $\mathscr{L}(E)$, on note $\varphi^0 = e$, $\varphi^1 = \varphi$, et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$: $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.

Soient
- p, q deux éléments de $\mathscr{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = e$,
- a, b deux réels distincts et non nuls,
- f un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\begin{cases} f = ap + bq \\ f^2 = a^2 p + b^2 q \,. \end{cases}$$

1. a. Montrer : 1) $(f - ae) \circ (f - be) = (f - be) \circ (f - ae) = O$.

2) $\begin{cases} f - ae = (b - a)\, q \\ f - be = (a - b)\, p \,. \end{cases}$

b. En déduire : $p \circ q = q \circ p = O$.

c. Montrer : $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

2. Prouver, pour tout n de IN : $f^n = a^n p + b^n q$.

3. a. Calculer : $f \circ \left(\frac{1}{a} p + \frac{1}{b} q \right)$.

b. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de p, q, a, b.

4. a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{a, b\}$.

b. En supposant que E est de dimension finie, f est-il diagonalisable ?

II. On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$;

on note 0 la matrice nulle.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta I$ et calculer (α, β).

2. En déduire deux réels a, b tels que :

$(M - a I)(M - b I) = 0$.

3. Montrer qu'il existe un couple (A, B) d'éléments de $M_3(\mathbb{R})$, que l'on exprimera en fonction de M et I, tel que :

$$\begin{cases} A + B = I \\ aA + bB = M . \end{cases}$$

4. En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on donnera de façon explicite les neuf coefficients de la matrice).

PROBLÈME 2

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La résolution de la partie **III** utilise les notations et des résultats des parties **I** et **II**.

Partie I

A. Soit f l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \dfrac{x}{\sin x} . \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

3. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 5 cm).

B. Soit g une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$, tel que pour tout réel $x > 0$:

$$\left| \int_0^1 \sin(xt)\, g(t)\, dt \right| \leq \frac{A}{x} .$$

2. En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \sin(xt)\, g(t)\, dt .$$

C. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme φ l'application de $]0,1]$ dans IR définie par $\varphi(x) = \dfrac{P(x)}{\sin\frac{\pi x}{2}}$.

   a. Exprimer φ à l'aide de la fonction f étudiée au **A.**

   b. En déduire que φ possède un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 P(t) \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\, dt = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)dt .$$

A. Étude de h.

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

   a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q'(x) = x\int_0^1 P(t)dt - \int_0^x P(t)dt$.

   b. Calculer Q".

2. Montrer que h est une application linéaire et que
   - le noyau de h, $\mathscr{K}er(h)$, est l'ensemble des polynômes constants,
   - l'image de h, $\mathscr{I}m(h)$, est l'ensemble des polynômes Q tel que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme Q, $h(Q")$.).

B. Étude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \\ \text{et} \\ \forall n \geq 2,\ P_n = h(P_{n-1}) . \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3.

2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$, pour $n \geq 2$?

3. Exprimer, en fonction de n, le monôme de plus haut degré de P_n.

4. Déduire du **II A.** 1. la relation : pour $n \geq 2$, $P_n" = \int_0^1 P_{n-1}(t)dt - P_{n-1}$.

Établir alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :

$$\forall n \geq 2\ ,\ \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt\ ,$$

puis

$$\forall n \geq 1\ ,\ \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie III

A. 1. Établir, pour tout N entier naturel non nul :

$$\forall t \in\ ]0,\pi]\ ,\ \sum_{k=1}^{N}\cos(kt) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\pi t}{2\sin\frac{\pi t}{2}} - \frac{1}{2}\right)dt\ ,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt\ .$$

3. **Application.** Montrer que les sommes de séries $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$, et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.

B. 1. On pose $P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p}\,X^p$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{cases} a_{n,0} = 0\ , \\ a_{n,1} = 0\ , \\ a_{n,2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2n-2}\frac{a_{n-1,p}}{p+1}\ , \\ a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)}\ , \text{ pour tout entier } p \in [3,2n]. \end{cases}$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \beta_n\pi^{2n},$$

pour un entier n, $1 \leq n \leq 25$, donné par l'utilisateur.

a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme ?

b. Écrire un programme en PASCAL qui calcule les coefficients de P_n puis le réel β_n et l'affiche.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Polynômes
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg