Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1993, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : un premier exemple
- Partie II : un second exemple
- Partie III : étude du cas général

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1993/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

jeudi 20 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par K le corps R des nombres réels ou le corps C des nombres complexes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel K^n (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$. On note v_1 le vecteur de K^n dont les composantes dans la base B sont toutes égales à 1.

On rappelle que l'espace vectoriel K^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G, ce qu'on note $K^n = F \oplus G$, si tout vecteur x de K^n peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, où y appartient à F et z appartient à G. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de K^n, appelé projecteur sur F de direction G.

Enfin, l'application identique de K^n est notée Id.

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $M_n(K)$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.)

PARTIE I : *un premier exemple*

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. *a*) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.

b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \mathrm{Id}$.

c) Établir que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_3)$, $p(e_2)$ et $p(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On considère la base $B' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base B'.

b) Pour tout nombre entier naturel non nul k, calculer par récurrence M'^k.

c) Déterminer la matrice de passage C de la base B à la base B'. Calculer son inverse.

d) Déduire de ces résultats l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question **1.**

PARTIE II : *un second exemple*

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *a*) Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{Id}$.

b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \mathrm{Id}$, puis établir que c'en est une base.

c) Établir que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_1)$, $p(e_2), \ldots, p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$. Établir que $p + q = \mathrm{Id}$, et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

PARTIE III : *étude du cas général*

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.

a) Montrer qu'une matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n, le produit AB appartient encore à S_n, de même que les puissances positives de A et B.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. En déduire que :

$$\dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u) = n$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base B est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on convient de noter :

$$|x| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

On remarquera que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $\mathbf{C}^n$, $|x + x'| \leq |x| + |x'|$.

3. *a*) Établir que, pour tout élément x de $\mathbf{C}^n$, $|f(x)| \leq |x|$.

b) En déduire que les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f.

4. *a*) Soit y un élément de $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$, écrit sous la forme $f(x) - x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer $f^k(x)$ en fonction de k, x et y.

Déduire du **3.** *a*) que $k\,|y| \leq 2\,|x|$, puis prouver que y est nul.

b) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathbf{C}^n$.

c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

5. *a*) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

b) On complète une base $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ en une base $B' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants $(1 = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|)$, associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Soit D la matrice associée à f dans la base B'.

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

c) En déduite que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice associée dans la base B au projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg