Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1995, filière ECG

Mathématiques approfondies EDHEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème, partie 1
- Problème, partie 2
- Problème, partie 3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1995/maths-appro-edhec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

CONCOURS D'ADMISSION
MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

LUNDI 15 MAI 1995, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-Règles graduées
-Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

Préliminaire :On rappelle que si (u_n) est une suite réelle , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
En déduire que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite a , strictement positive , alors il existe un entier naturel n_0 tel que , pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geq \frac{a}{2}$.
Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice .

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x.(1-x)$ et la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1 Etudier les variations de f .

2a Montrer que,pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$

2b Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est croissante .
En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.

2c Pour tout entier naturel n , on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in N}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3 On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4 Montrer à l'aide de la question 2b que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

EXERCICE 2

Partie I: E désigne un espace vectoriel sur R , de dimension n ($n \geq 2$)
On note i l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E .
Soit s un endomorphisme involutif de E , c'est à dire vérifiant $s \circ s = i$.

1 Justifier que s est bijectif et définir s^{-1} .
2 Déterminer les seules valeurs propres possibles de s .
On suppose dans la suite de cette partie que de plus $s \neq i$ et $s \neq -i$.
3a Montrer que $(s - i) \circ (s + i) = \theta$.
3b En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s .
4 Montrer que $E = \text{Ker}(s - i) \oplus \text{Ker}(s + i)$ (On montrera dans un premier temps que si pour tout x de E on a : $x = u+v$, avec u élément de Ker (s - i) et v élément de Ker (s + i) , alors nécessairement $s(x) = u - v$)
s est appelée la symétrie par rapport à Ker (s - i) parallèlement à Ker (s + i).

Partie II : Etude d'un exemple.

$M_n(R)$ désignant l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n , on note S l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(R)$ et A l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(R)$.
Si M est la matrice de $M_n(R)$ dont $m_{i,j}$ est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne , avec i et j éléments de { 1,2,...,n } ,on rappelle que :
M est symétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = m_{i,j}$.
M est antisymétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = -m_{i,j}$.
Dans la suite , ${}^t M$ désigne la matrice transposée de M .
1 Vérifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(R)$.
2 Montrer que : $M_n(R) = S \oplus A$.
3 On note T l'endomorphisme de $M_n(R)$ qui à chaque matrice associe sa transposée , montrer que T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A .

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice , n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif .

Partie I

1 j et k désignant des entiers naturels , $a_{k,j}$ des réels tels que , pour tout j la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ soit convergente , montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$.

2 Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans { 0,1,...,n } . Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que X=k par :

$$E(S / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j\, P(S=j / X=k)$$

Montrer , en utilisant la première question , que : $E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S/X=k).P(X=k)$.

Partie II

Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble .A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
On émet les hypothèses suivantes :
-Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée .
-Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers . (Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur)
Enfin , pour tout entier naturel k , on appelle S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ .

1 Montrer que pour tout j appartenant à { 1,2,...,n } et pour tout entier naturel k :

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n}P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n}P(S_k = j-1).$$

2 En déduire que $E(S_{k+1}) = 1 + (1-\frac{1}{n})\ E(S_k)$.

3 Après avoir justifié que $E(S_0) = 0$, déterminer $E(S_k)$ pour tout entier naturel k .

4 Montrer que si S désigne la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné : $E(S) = n(1-e^{-\frac{\lambda}{n}})$

PROBLEME

p et n désignent deux entiers naturels non nuls .

Partie I

On pose : $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1a Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1 : $0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

1b En déduire que la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ est élément de [0,1] . On note maintenant : $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

2a Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{p+x}dx$.

2b En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \le u_p \le \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$.

2c A l'aide de cette dernière inégalité , établir que : $\frac{1}{2(n+1)} \le r_n \le \frac{1}{2n}$

3 Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

Partie II

Dans cette partie , k est un entier supérieur ou égal à 1 .

On pose , pour tout réel t strictement positif : $f_0(t) = \frac{1}{t}$ et $f_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\ldots(t+k)}$

1 Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = k.f_k(t)$.

2 En déduire que : $\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k.(n+k)!}$

Partie III

On note P_k le polynôme défini par :

$P_1(t) = t$ et , pour tout k supérieur ou égal à 2 , $P_k(t) = t(1-t)(2-t)\ldots(k-1-t)$.

On pose d'autre part : $a_k = \int_0^1 P_k(t)dt$.

1a Vérifier que, pour tout x positif : $\frac{1}{p+x} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \times \frac{1-x}{p+x}$

1b En déduire que $u_p = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x} dx$.

2a Montrer que pour tout k entier supérieur ou égal à 1 , et pour tout réel x positif :

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}$$

2b En déduire , par récurrence sur k , que:

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx$$

2c Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \le \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx \le \frac{a_{k+1}}{p-1}$

2d En déduire , en utilisant la partie II , que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$$

avec $0 \le r_{n,k} \le \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

2e Construire une suite $(v_{n,k})_{n \in N}$, de limite γ telle que : $0 \le \gamma - v_{n,k} \le \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

3a Calculer a_1, a_2, a_3, a_4 .

3b Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

3c Ecrire , en Turbo-Pascal , un algorithme permettant le calcul de v_{n_0} , puis de $v_{n_0,3}$.

3d Donner la valeur de γ à 10^{-5} près .

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Réels, sommes et produits

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg