Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1995, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1995/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1995

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Vendredi 12 mai 1995 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

si $1 \le i \le n-1$: $a_{i,i+1} = i$;

si $2 \le i \le n$: $a_{i,i-1} = n+1-i$;

si $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$: $a_{i,j} = 0$.

Ainsi : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \cdot & & & \cdot \\ 0 & n-2 & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On suppose, dans cette question seulement, n = 3 : $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer les valeurs propres de A_3 .
   b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?
   c. La matrice A_3 est-elle inversible ?

2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n – 1 .
   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E :
   $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$.
   On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A_n .
   a. Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n-2$, $u(X^j)$.
   b. Démontrer que, pour tout élément P(X) de E :
   $u(P(X)) = (n-1)\,X\,P(X) - (X^2-1)\,P'(X)$
   (où P'(X) désigne la dérivée de P(X)) .

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u, et on considère un vecteur propre P(X) associé à cette valeur propre.
   a. On suppose : $\lambda \neq n-1$. Montrer que 1 est racine de P(X) .
   b. On suppose : $\lambda \neq 1-n$. Montrer que –1 est racine de P(X) .
   c. On suppose : $\lambda = n-1$.
      Montrer qu'il existe un polynôme T(X) de E et un entier naturel non nul s tels que :
      $P(X) = (X+1)^s\,T(X)$ et $T(-1) \neq 0$.
      Montrer que : $s = n-1$.
      Montrer que T(X) est un polynôme constant et non nul.
   d. On suppose : $\lambda = 1-n$.
      Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :
      $P(X) = a(X-1)^{n-1}$.
   e. On suppose : $\lambda \neq 1-n$ et $\lambda \neq n-1$.
      Montrer qu'il existe un polynôme T(X) de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que :
      $P(X) = (X-1)^r(X+1)^s\,T(X)$ et $T(-1) \neq 0$ et $T(1) \neq 0$.
      Montrer que : $1 \leq r \leq n-2$,
      $s = n-1-r$,
      $\lambda = n-1-2r$.
      Montrer que T(X) est constant et non nul.

4. a. Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n-1$, calculer $u[(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}]$.
   b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
   Démontrer que $\mathcal{C} = \left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E .

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 2

Le but du problème est l'étude de l'application F : IR $\longrightarrow$ IR définie par F(0) = 1 et , pour tout x de IR* ,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} .$$

On note r : $]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

1. Étude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

a. Montrer : $\forall x \in]0\,;+\infty[\ ,\ 0 \leq F(x) \leq 1$.

b. En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F .

c. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que :
$\forall x \in]0\,;+\infty[\ ,\ x\,F'(x) = -F(x) + r(x^4)$.

d. Montrer : $\forall x \in]0\,;+\infty[\ ,\ r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. Étude locale de F en 0

a. Montrer que F est continue en 0 .

b. α. Établir :
$$\forall u \in [0\,;+\infty[\ ,\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right) \leq \frac{3}{8}u^2 .$$

β. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 , et déterminer celui-ci.

γ. Montrer que F est dérivable en 0 , et calculer $F'(0)$.

c. Établir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 , et déterminer celui-ci.

d. Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude locale de F en $+\infty$

a. α. On note h : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} .$$

En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \in]0\,;+\infty[$.

β. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[\ ,\ x\,F(x) + \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$.

b. α. En déduire : $F(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

β. Montrer : $F'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion, et on admettra que $F(1)$ admet 0,93 comme valeur approchée à 10^{-2} près).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Polynômes
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg