Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1995, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : endomorphismes vérifiant f^2 = (f + I)/2
- Partie II : endomorphismes vérifiant f^3 = (f^2 + f + I)/3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1995/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

lundi 22 mai 1995, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: – Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{f o f \ldots o f}_{k \text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de $\mathbb{R}^m$ et par I_m la matrice identité d'ordre m.

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de $\mathbb{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur F dans la direction G.

PARTIE I.

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \qquad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1).

Déterminer les réels α tels que $f = \alpha I$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

a. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f.
Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.
En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I.

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1).

a. Soit λ une valeur propre de f. En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ, établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f.

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - I)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f - I)$ et de $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

c. On pose $r = \dim \mathrm{Ker}(f - I) \qquad (0 \leqslant r \leqslant m)$.

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$.
Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\mathrm{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_m)$ de $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

d. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

e. Calculer $(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I)$.

En déduire que $\mathrm{Im}(f - I)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

PARTIE II.

1. Étude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \qquad (2)$$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^3 = \dfrac{r^2 + r + 1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\overline{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.

b. Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2).

c. On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \overline{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \overline{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z.)

- Établir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + y\,\alpha^n + z\,\overline{\alpha}^n$.

- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \qquad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $c = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ de ces trois suites.

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$.
Établir que q est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I.

3. Étude du projecteur q.

a. Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f.
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - I)$ et $z \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Exprimer y et z en fonction de x, $f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f-I)$ et de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$, et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

c. Calculer $(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f-I)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

4 Étude des solutions de (3)

a. On suppose dans cette question que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$. Montrer que $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 2$.

b. On suppose dans cette question que $m=2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions possibles de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\mathrm{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2\big)$ soit libre. Montrer que $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est encore une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 4$.

d. On suppose dans cette question que $m=3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les dimensions possibles de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\mathrm{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

e. Étudier de la même manière le cas $m=4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

f. On suppose désormais $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q)\big)$ une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}\big)$ soit encore une famille libre.
Montrer que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1})\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ et en déduire que la dimension de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ est paire.

g. On pose $2r = \dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) \qquad (0 \leqslant 2r \leqslant m)$.
Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(f-I)$.

h. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \frac{1}{3}(M^2+M+I_m)$.

FIN

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles
- Polynômes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg