Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 1996, filière ECG

## Mathématiques 2 approfondies ESCP-HEC

### Ce que traite le sujet

- Préliminaire : une suite numérique
- Partie I : expériences aléatoires discrètes
- Partie II : expériences aléatoires continues

**Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.**

Copie ressaisie du sujet de HEC 1996, mise en page et en-tête différents de l'original, sans retouche apparente de l'énoncé ; la durée n'y figure pas.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1996/maths-appro-2-escp-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# HEC 1996
# Mathématique II
# option Scientifique

Un banquier s'est imposé de vendre une action en dix jours ouvrables. Chaque jour, suivant le cours du jour, il décide de vendre ou d'attendre dans l'espoir de vendre mieux plus tard. S'il n'a pas réalisé la vente au neuvième jour, il s'impose de vendre son action au dixième jour. Quelle stratégie va-t-il choisir?
Le problème ci-dessous propose, dans un cadre théorique précis, d'évaluer diverses stratégies pour de tels choix en chaîne.
On considère une suite d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, à laquelle on associe une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et toutes de même loi.
On considère un entier naturel non nul $n$.
Si $n$ est égal à 1, on définit le gain $G_1$ par : $G_1 = X_1$
Si $n$ est supérieur ou égal à 2, on se donne pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ un seuil $\sigma_i$ et on définit le gain $G_n$ par :

- si, pour tout $i$ strictement inférieur à $n$, $X_i < \sigma_i$ , alors $G_n = X_n$
- et sinon, $G_n = X_k$ où $k$ est le plus petit rang $i$ tel que $X_i \geqslant \sigma_i$.

Le gain $G_n$ est une variable aléatoire dont l'espérance est notée $g_n$. (Dans l'exemple introductif du banquier, $n$ est égal à 10, $X_i$ représente le cours de l'action au jour de rang $i$ et $G_{10}$ est égal au prix de la vente).
On étudie en partie I., trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires discrètes et en partie II., trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires continues. On étudie dans le préliminaire une suite numérique que l'on retrouve à la fin de la partie Il. Les parties I et Il sont dans une large mesure indépendantes.

# Préliminaire

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$

.1. a) Ecrire un programme en Pascal qui calcule et affiche les 100 premiers termes de la suite.

b) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $u_{100}$ à $10^{-2}$ près.

.2. a) Etudier la fonction $h$ définie par : $\forall x \in [0;1] \quad h(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

c) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

.3. On pose pour tout $n$, entier naturel non nul : $\quad v_n = 1 - u_n$

a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2-v_n}$. En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_n} \geqslant \dfrac{n+3}{2}$

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1] \quad \dfrac{1}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$. En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+3}$.

Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$ où $\ln(n)$ désigne le logarithme népérien de $n$.

En déduire : $\forall n \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{v_n} \leqslant \dfrac{n+2}{2} + \ln(n+2)$

c) Déterminer un équivalent de $v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

# Partie I *Exemples d'expériences aléatoires discrètes.*

Dans cette partie $r$ **est un entier impair**, supérieur ou égal à 3, et on suppose que, pour tout $i$ entier naturel non nul, la variable aléatoire $X_i$ est discrète et équirépartie sur l'ensemble $\left\{0,\ \frac{1}{r},\ \frac{2}{r},\ \ldots,\ \frac{r}{r}\right\}$ (chacune des $r+1$ valeurs étant prise avec la même probabilité).

I.1. *Première stratégie.*

On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$. On a donc, pour tout entier naturel $n$ non nul, $G_n = X_1$.

Calculer l'espérance $g_n$ de la variable aléatoire $G_n$. (On rappelle que : $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$).

I.2. *Deuxième stratégie.*

On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\quad \sigma_i = 0,5$.

a) Calculer $P(X_1 < 0,5)$.

b) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$, l'événement $(G_n = \frac{j}{r})$ pour $j \in \left\{0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{r-1}{2}\right\}$ puis pour $j \in \left\{\frac{r+1}{2},\ \ldots,\ r\right\}$.

En déduire que la loi de $G_n$ est donnée par :

$\forall j \in \left\{0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{r-1}{2}\right\} \qquad P(G_n = \frac{j}{r}) = \frac{2}{r+1}\frac{1}{2^n}$

$\forall j \in \left\{\frac{r+1}{2},\ \ldots,\ r\right\} \qquad P(G_n = \frac{j}{r}) = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

c) Calculer $g_n$. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Déterminer la limite de $g_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ avec $r$ fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat?

Déterminer la limite de $g_n$ quand $r$ tend vers $+\infty$ avec $n$ fixé.

I.3. *Troisième stratégie.*

On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\quad \sigma_i = 1$.

a) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$, l'événement $(G_n = \frac{j}{r})$ pour $j \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\}$.

En déduire la loi de $G_n$.

b) Calculer $g_n$ Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Déterminer la limite de $g_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ avec $r$ fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat?

Déterminer la limite de $g_n$ quand $r$ tend vers $+\infty$ avec $n$ fixé.

I.4. Comparer brièvement les trois stratégies de la partie I..

# Partie II *Exemples d'expériences aléatoires continues.*

Dans cette partie, on suppose que, pour tout entier naturel non nul $i$, la variable aléatoire $X_i$ suit une loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]$ ; elle admet donc une densité $\varphi$ définie par:

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi(t) = 1 \qquad \text{et sinon} \quad \varphi(t) = 0$$

On dit que les variables $(X_i)_{i\geqslant 1}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ les événements $(X_1 \leqslant t_1), \ldots, (X_n \leqslant t_n)$ sont mutuellement indépendants ; on a alors, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t_i)$. (Les variables étant des variables à densité, les égalités ci-dessus sont encore vraies si on remplace $(X_i \leqslant t_i)$ par $(X_i < t_i)$.
On note $F_n$ la fonction de répartition de $G_n$.

II.1. Déterminer $F$, la fonction de répartition de $X_1$

II.2. *Première stratégie.*
On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$.
Calculer l'espérance $g_n$ de la variable aléatoire $G_n$.

II.3. *Deuxième stratégie.*
Soit un réel $\alpha \in [0, 1[$. On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\sigma_i = \alpha$.

a) Que vaut $F_n(t)$ pour $t$ n'appartenant pas à $[0, 1[$?
Pour $t \in [0, \alpha[$, décrire l'événement $(G_n \leqslant t)$ et en déduire $F_n(t)$.
Pour $t \in [\alpha, 1[$, décrire l'événement $(G_n > t)$ et en déduire $F_n(t)$.
Montrer que $G_n$ admet une densité $f_n$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \alpha^{n-1} & \text{si } t \in [0, \alpha[ \\ \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} & \text{si } t \in [\alpha, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Calculer $g_n$ en fonction de $\alpha$. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Déterminer la limite de $g_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir ce résultat?

c) Déterminer la valeur de $\alpha$ telle que $g_2$ soit maximum.

d) Dans cette question, $\alpha = 0,5$.
Donner la valeur de $g_n$. Quelle remarque peut-on faire en comparant ce résultat avec celui de la deuxième stratégie de la partie I.

II.4. *Troisième stratégie.*
Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels telle que, pour tout entier $k$ non nul, $0 \leqslant a_k < 1$.
Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = a_{n-i}$.

a) En utilisant les résultats de II.2., montrer que $G_1$ admet une densité et une espérance. Donner la valeur de $g_1$.

b) En utilisant les résultats de II.3., montrer que $G_2$ admet une densité et une espérance. Donner la valeur de $g_2$ en fonction de $a_1$.
Déterminer la valeur de $a_1$ qui maximise $g_2$.

c) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
On suppose que $G_n$ admet une densité notée $f_n$.
On suppose de plus que, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $G_k$ admet une espérance $g_k$ vérifiant $g_k \in [0;1[$ et que, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_k = g_k$.
Et donc la variable aléatoire $G_{n+1}$ est associée aux seuils : $\sigma_1 = a_n$, $\sigma_2 = g_{n-1}$, $\ldots$, $\sigma_n = g_1$.
Montrer que : $\forall t \in [0, a_n[ \quad F_{n+1}(t) = a_n F_n(t)$
$\forall t \in [a_n, 1[ \quad F_{n+1}(t) = t - a_n + a_n F_n(t)$
En déduire que $G_{n+1}$ admet une densité $f_{n+1}$ et donner une relation entre $f_{n+1}$ et $f_n$.
En déduire que $G_{n+1}$ admet une espérance $g_{n+1}$ vérifiant $g_{n+1} = a_n g_n + \dfrac{1}{2}(1 - a_n^2)$.
Déterminer la valeur de $a_n$ qui maximise $g_{n+1}$
Montrer que, pour cette valeur de $a_n$, $g_{n+1} = \dfrac{1 + g_n^2}{2}$ et que $g_{n+1} \in [0;1[$

d) On construit ainsi, par récurrence, une suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geqslant 1}$ dont les espérances vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_{n+1} = \dfrac{1 + g_n^2}{2}$
Quelle est alors la limite de la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ ?

II.5. Comparer les trois stratégies de la partie I..

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Réels, sommes et produits
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg