Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1996, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, première partie
- Premier problème, deuxième partie
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1996/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1996

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve

(option scientifique)

Lundi 6 mai 1996 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

PREMIER PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k},$$

c'est-à-dire, si on note $E\left(\frac{n}{2}\right)$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2 - 1$.
   Calculer P_3.

2. Etudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n.

3. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+1)t = \sin t\, P_n(\cos t).$$

(On pourra développer $(\cos t + i\sin t)^{n+1}$ et étudier la partie imaginaire.)

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le polynôme P_n vérifie la relation :

$$(n^2+2n)P_n - 3XP'_n - (X^2-1)P''_n = 0 .$$

(On pourra dériver deux fois dans la relation obtenue à la question 3.a.)

4. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+2)t + \sin nt = 2\cos t \sin(n+1)t.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0 .$$

c. Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n, c'est-à-dire le coefficient de X^n dans P_n .

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2 . On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et B_0 la base $(1, X, ..., X^n)$ de E .

Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P'' .$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .

2. a. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(X^k)$.

b. Déterminer une base de l'image de Φ .

c. Déterminer une base du noyau de Φ .

3. On considère les polynômes $P_0, P_1, ..., P_n$ définis dans la première partie.

a. Vérifier que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E .

b. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(P_k)$.
(On pourra utiliser le résultat de la question 3.b. de la première partie.)

c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ .

d. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que :
$\Phi(P) = P_k$.

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt .$$

En particulier : $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

I. Étude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.

2. Démontrer : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.

   On pourra intégrer par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.

On note $g : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$g(x) = (x+1)\, f(x+1)\, f(x) .$$

3. a. Montrer que g est 1– périodique, c'est-à-dire :

   $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $g(x+1) = g(x)$.

   b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x+n) = g(x)$.

   c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Soit $x \in [0 ; 1]$.

   α. En utilisant 1., montrer :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (x+n+1)\, f(n+1)\, f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1)\, f(n)\, f(n+1)$.

   β. En déduire :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+1}$.

   γ. Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

   b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. a. Établir : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

II. Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout n de IN : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

1. a. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in IN}$ et $(S_{2p+1})_{p\in IN}$ sont adjacentes.
(On pourra utiliser **I**.1. et **I**.5.)

   b. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On considère l'application $\varphi : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow IR$ définie, pour tout t de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $\varphi(t) = \frac{1}{1+\sin t}$.

2. a. Montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}$.

   b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt$.

3. On note, pour tout n de IN : $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt - S_n$.

   a. Montrer, pour tout n de IN :

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k\right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt .$$

   b. En déduire : $D_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   c. Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Réels, sommes et produits
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg