Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1997, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1997/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve

(option scientifique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

PREMIER PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,g) \longrightarrow \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $e_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E_n.

2. Calculer, pour tout (i,j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, $\phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

3. **Étude du cas n = 2**

   a. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

   b. La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

   c. Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. a. Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

   On note $a_1, \ldots, a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1, \ldots, b_n$ les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$,

   A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

   Montrer : $\phi(P,Q) = {}^tA\, H_n\, B$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

   b. En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.

   c. La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta_i = \phi(e_i, f)$.

   On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1}B$.

   On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

   On considère l'application $d : E_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto \|P-f\|$.

   a. Montrer : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

   b. En déduire : $\forall Q \in E_n$, $\phi(Q, P_0 - f) = 0$.

   c. Établir : $\forall P \in E_n$, $\|P-f\|^2 = \|P-P_0\|^2 + \|P_0-f\|^2$.

   d. Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

   e. Montrer : $\|P_0-f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

   f. **Un exemple :**

   On choisit ici $n=2$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \left|t - \frac{1}{3}\right|$.

   Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

DEUXIÈME PROBLÈME

I. Étude de la suite de terme général $M_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $v_n = -1 + n\,ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

   a. Montrer qu'il existe un réel α strictement négatif tel que $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$.

   b. En déduire la nature de la série de terme général v_n et montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ admet $-\infty$ comme limite.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $M_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$.

   a. Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

   $$v_n = ln\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right).$$

   b. En déduire la limite de la suite de terme général M_n.

II. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Donner le tableau des variations et une représentation graphique de f_1 puis de f_n pour $n \geq 2$.
   On ne déterminera pas les éventuels points d'inflexion.
   Vérifier que M_n est la borne supérieure de f_n.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $[0,+\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.

   a. Soit x un réel positif ou nul. Établir une relation entre $F_{n+1}(x)$, $F_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.
   En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

   $$F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

III. Étude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

1. Prouver, pour tout entier naturel non nul n :

   $$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt - f_{n+1}(n).$$

   En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel L vérifiant $0 < L \leq 1$.

2. Déterminer une valeur approchée décimale par défaut à 10^{-1} près de u_2.
   En déduire un nouvel encadrement de L.

3. Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(t) = \frac{t}{2-t} e^{2-2t}$.

   a. Montrer : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq h(t) \leq 1$.

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,n]$, $\frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(h\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.

   c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,n]$, $f_n(x) \leq f_n(2n-x)$.

   d. En utilisant l'inégalité précédente, montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \leq \int_0^n f_n(2n-t)\,dt \leq \int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

   En déduire : $L \leq \frac{1}{2}$.

IV. Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste

Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

On note $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On rappelle que Y_n suit une loi de Poisson.

1. Déterminer l'espérance de Y_n.
2. Exprimer la probabilité $P(Y_n \leq n)$ en fonction de u_n.
3. A l'aide du théorème de la limite centrée, que l'on énoncera avec soin, trouver la valeur de L.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg