Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 1998, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I
- Partie II
- Partie III

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/1998/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations :

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier naturel non nul k, X^k désigne la fonction polynôme $t \longmapsto t^k$.

Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si d est le degré de P, alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, où $a_0,\ a_1, \cdots,\ a_{d-1}$ sont des réels).

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt$ est convergente.

b. Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$.

Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $<.,.>$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$<P, Q> = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt\ .$$

2.a. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E_n.

b. Pour tout couple $(i\ ,\ j)$ d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $<X^i, X^j>$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3.a. Construire une famille orthogonale $(Q_0,\ Q_1,\ Q_2)$ de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0,\ 1,\ 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).
On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

b. Montrer pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt = <Q_2, Q_2> + (u+4)^2 <Q_1, Q_1> + (u+v+2)^2 <Q_0, Q_0> .$$

c. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u, v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt .$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1 - X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\Phi(P)(t) = t\, P''(t) + (1 - t)P'(t) .$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1,\ X, \cdots, X^n)$ de E_n .

2.a. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer que la famille $\left(\Phi(X^j) + kX^j\right)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ est liée.
En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ.

b. Montrer que Φ est diagonalisable.

c. Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.
En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -k\, P_k$.

d. Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, le degré de P_k .

e. Vérifier que $P_0 = Q_0,\ \ P_1 = Q_1,\ \ P_2 = Q_2$.

3.a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \ \ <\Phi(P), Q> = -\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, e^{-t} dt .$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $\left(t \mapsto tP'(t)e^{-t}\right)$ avec la fonction $\left(t \mapsto \Phi(P)(t)\ e^{-t}\right)$.

b. En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

c. En déduire que la famille $(P_0,\ P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2+\sqrt{2}$ et $b = 2-\sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P(a) + \beta\,P(b)$.

b. Vérifier : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_2(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P_2(a) + \beta\,P_2(b)$.

c. Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 .
Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R, chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = Q\,P_2 + R$.
Montrer : $< P_2, Q > = 0$.
En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P(a) + \beta\,P(b)$.

Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$.
Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0,+\infty[,\ |f^{(4)}(t)| \leqslant M$.

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant T(t) .$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t}\,dt$ converge.

b. Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall P \in E_3,\quad D(P) = \Big(P(a),\ P'(a),\ P(b),\ P'(b)\Big) .$$

Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a),\quad S'(a) = f'(a),\quad S(b) = f(b),\quad S'(b) = f'(b) .$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b.
On définit la fonction g sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\quad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\big(P_2(t)\big)^2 .$$

a. Vérifier que g s'annule en a, b et x_0 .

b. En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$
(On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

c. En déduire : $f(x_0) - S(x_0) = \dfrac{\left(P_2(x_0)\right)^2}{4!} f^{(4)}(c)$,

puis : $\left|f(x_0) - S(x_0)\right| \leqslant \dfrac{\left(P_2(x_0)\right)^2}{4!} M.$

4.a. Etablir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad \left|f(x) - S(x)\right| \leqslant \dfrac{\left(P_2(x)\right)^2}{4!} M$.

b. En déduire : $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leqslant \dfrac{M}{6}$.

5. ***Application :***

Soit f : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \dfrac{1}{10 + t}$.

En admettant que $0.0915 \leqslant \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} f(2 + \sqrt{2}) + \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4} f(2 - \sqrt{2}) \leqslant 0.0916$,

donner une valeur décimale approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10 + t}\, dt$. On en indiquera la précision.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Algèbre bilinéaire
- Polynômes
- Réels, sommes et produits
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg