Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2000, filière ECG

Mathématiques approfondies EDHEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2000/maths-appro-edhec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mercredi 3 mai 2000, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.
   a. On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t, h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.
   b. Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t, h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}\, h$.

   On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geq 0$.

   La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.
2) Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.
   a. Pour tout réel strictement positif t, calculer $\int_0^t \lambda_X(u)\, du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.
   b. Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.
3) La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.
   a. Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?
   b. Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Exercice 2

Dans cet exercice, x désigne un réel élément de $[0, 1[$ et n un entier supérieur ou égal à 1.

1) a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$.

b. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - ln(k) \leq 1$.

2) a. Montrer que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

b. En déduire que la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de x.

3) a. Pour tout x de $]0, 1[$, calculer $\lim_{n \to +\infty} \ln(n^2 \ln(n) x^n)$.

b. En déduire que, pour tout x de $[0, 1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.

On pose maintenant $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) x^k$.

4) Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x est au voisinage de 1^-.

a. Montrer, en utilisant la première question, que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} x^k .$$

b. En déduire que : $0 \leq \frac{1}{1-x} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}$.

c. Justifier que : $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 0$.

d. En déduire que : $S(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 3

Un sondage consiste à proposer l'affirmation « A » à certaines personnes d'une population donnée. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas...

L'enquêteur dispose d'un paquet de 20 cartes, numérotées de 1 à 20, qu'il remet à la personne sondée. Celle-ci tire une carte au hasard et ne la montre pas à l'enquêteur.

La règle est alors la suivante :

- si la carte porte le numéro 1, la personne sondée répond *"vrai"* si elle est d'accord avec l'affirmation « A » et *"faux"* sinon.
- si la carte porte un autre numéro, la personne sondée répond *"vrai"* si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation « A » et *"faux"* sinon.

Le but de l'enquête est d'évaluer la proportion p de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation « A ».

1) On interroge une personne selon ce procédé et on considère l'événement suivant, noté V : « la personne répond *"vrai"* ». On note $\theta = P(V)$.
En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer θ en fonction de p, puis en déduire p en fonction de θ.

2) Certaines considérations théoriques laissent penser que $p = \frac{17}{18}$.

a. Vérifier que $\theta = \frac{1}{10}$.

b. Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant répondu *"vrai"* soit d'accord avec l'affirmation « A ».

On revient au cas général où l'on ne connaît ni p, ni θ.

3) On considère un échantillon aléatoire, de taille n, extrait de la population considérée et on note S_n le nombre de réponses *"vrai"* obtenues. On suppose n assez grand pour pouvoir considérer que cet échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise.

a. Donner la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.

b. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4) Dans cette question, on suppose que l'on a réalisé un échantillon de 100 personnes et on constate que 23 personnes ont répondu *"vrai"*.

a. Donner une estimation ponctuelle de θ et de p.

b. Donner un intervalle de confiance à 95 % de θ puis de p.

On rappelle que, si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$.

Problème

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté (. / .) défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u / u)}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.
Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu' un réel α tels que : pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on ait : $(u_i / u_j) = \alpha$.
La partie 1 permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie 2 étudie les propriétés d'une telle famille et la partie 3 propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

Partie 1

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel a, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à a. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1) a. J est-elle diagonalisable ?

   b. Calculer J^2 et en déduire les 2 valeurs propres de J.

2) a. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les deux valeurs propres de M_a.

   b. En déduire que M_a est inversible si et seulement si : $a \neq 1$ et $a \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

Partie 2

On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ formée de n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, et un réel α solutions du problème.

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.

   a. Montrer que $M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.

   b. En déduire la valeur maximale de n lorsque $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

2) Étude du cas $\alpha = 1$.

   a. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j (avec $i \neq j$). À quelle condition a-t-on l'égalité ?

   b. En déduire que $n = 1$.

3) Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4), formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

   a. Donner la valeur de α.

   b. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.

   c. Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

Partie 3

1) Donner une famille solution du problème posé, pour $n = 3$ et $\alpha = 0$.

2) On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

   a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

   b. Trouver deux réels λ et μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Algèbre bilinéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg