Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2000, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème : décomposition d'une matrice
- Deuxième problème : somme d'une série et calcul d'une intégrale

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2000/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
  I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ défini par :
  si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, alors $\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
  En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $\langle x\,,\,y\rangle = {}^tX\,Y$.
  La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\ \|$.
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

a. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = P\,D\,{}^tP$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Vérifier que $(M - 2\mathrm{I}_3)^3 = \mathrm{I}_3$.

b. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c. Calculer le produit ${}^tM\,M$.

Partie II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle g(y)\,,\,x\rangle = \langle y\,,\,f(x)\rangle \quad \text{puis} \qquad \langle (g\circ f)(x)\,,\,x\rangle = \|f(x)\|^2.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tA\,A = Q\,\Delta^2\,{}^tQ$.

6. Montrer que la famille $\left(f(e'_1), f(e'_2), \ldots, f(e'_n)\right)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a. Vérifier que les nombres réels $\mu_1,\ \mu_2\ , \ldots, \mu_n$ sont tous non nuls.

b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\mu_1}f(e'_1), \frac{1}{\mu_2}f(e'_2), \ldots, \frac{1}{\mu_n}f(e'_n)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

c. Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\,\Delta\,{}^tQ$.

Partie III

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R\,\Delta\,{}^tQ$ où M est la matrice définie dans *I. 2* .

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I - Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\, \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\, \pi]$:

$$1 + 2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

b. Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$:

$$\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}\ .$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in\,]0;\, \pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0;\, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in\,]0;\, \pi] \end{cases}\ .$$

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0;\, \pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x$.
Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

II - Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de *I. 2.* et *I. 4.*).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et de n.

4. Etablir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} \ .$$

III - Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note : $\displaystyle F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

2.a. Montrer, pour tout réel t de $[0;\ 1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \ .$$

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que : $\displaystyle G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

3.a. En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\, G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1} \ .$$

b. Etablir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} \ .$$

4. En utilisant le résultat de *II. 4.*, établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\dfrac{\pi}{\alpha}}{\sin\dfrac{\pi}{\alpha}} \ .$$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg