Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2001, filière ECG

Mathématiques appliquées emlyon

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie (LaTeX) du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2001/maths-appli-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.

2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4.

(b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de f.

(c) Déterminer la dimension du noyau de f.

(d) Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

(d) En déduire que f est C^1 sur $[0;+\infty[$.

2. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que: $\forall x \in]0;+\infty[\qquad f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$

(b) Etudier les variations de la fonction $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par:

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$

En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$

(c) En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

(c) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(d) Etablir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

(b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \qquad \int_0^x f_n(t)\,dt = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$

(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

1. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

$$E(X_n) = n + 1 \qquad V(X_n) = n + 1$$

(b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t)\ dt \simeq 0,37 \qquad \int_0^6 f_4(t)\ dt \simeq 0,71 \qquad \int_0^8 f_4(t)\ dt \simeq 0,90$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.
Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leqslant 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

(a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la $n^{ième}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

(b) Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'événement $(Y_t \geqslant n)$

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

- FIN -

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Suites réelles
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg