Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2001, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2001/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EMLYON

European Entrepreneurial Learning

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note $I = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Le but du problème est la construction d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall x \in I,\quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) \mathrm{d}t\,.$$

On considère les applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définies par $f_0 = 1$ (application constante égale à 1) et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) \mathrm{d}t\,.$$

1 . a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

b. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I.
On note :

$$D_n = \operatorname*{Sup}_{x \in I} \left|f_n(x) - f_{n-1}(x)\right|.$$

a. Calculer D_1 et D_2.

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\quad \left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} D_n\,.$$

On pourra étudier séparément les cas $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$.

E.M.LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

d. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} D_n$.

En déduire que, pour tout x fixé dans I, la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(f_n(x) - f_{n-1}(x)\right)$ converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On définit ainsi une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \operatorname{Sup}_{x \in I} |f_n(x)|$.

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ M_n \leqslant 2.$$

c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x, y) \in I^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x - y|.$$

5. **a.** Établir :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|.$$

b. En déduire que f est continue sur I.

6. **a.** Établir :

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

b. En déduire :

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) \mathrm{d}t.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Rappel :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes qui sont :

$$1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},\ldots,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta} \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star & f^p(x_0) = x_0, \\ \star & \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est génératrice de } E, \\ \star & \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est alors appelée un cycle de f.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1)\big)$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1),\ f^3(e_1)\big)$ est un cycle de f.

3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$.

4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

1. Montrer : $p \geqslant n$.

2. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\big)$ est libre.

a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

c. En déduire que $m = n$ et que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.

4. On note $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0).$$

a. On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0\, \mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.

Montrer : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ g\big(f^k(x_0)\big) = f^{n+k}(x_0)$.

En déduire : $\quad f^n = a_0\, \mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

c. Montrer : $\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \geqslant n - 1$.

En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim(E) = n$).
Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

a. Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$.

c. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Polynômes
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg