Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2001, filière ECG

Mathématiques HEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2001/maths-e-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 8 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a) On suppose dans cette question que $m = 2$. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.

   b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

2. Etudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice H_0. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. a) Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est une valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

   b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre de H_m associé à la valeur propre a. Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1.0)$.

   Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.

5. En se plaçant dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs v_1, v_2 et v_3, déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

EXERCICE II

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Notation : Si Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note $\mathrm{E}(Z)$ son espérance.

N.B. La partie **II** peut être traitée indépendamment de la partie **I**.

I. Préliminaire

1. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n.

   b) Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?

2. a) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$.

   b) Déduire de la majoration obtenue que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème de la limite centrée, que la suite définie pour n supérieur ou égal à 1 par $n \mapsto \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non nulle.

L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ meilleure que la majoration obtenue à la question 2.a.

II. Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f.

   b) Montrer qu'il existe des réels α et β, que l'on déterminera, tels que l'on ait :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

   c) Montrer de même qu'il existe des réels α' et β', tels que l'on ait :

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\alpha' x + \beta')) = 0$$

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = f(x) - ax$.

   a) Étudier les variations de la fonction φ_a et préciser les valeurs de $\varphi_a(0)$ et de $\varphi'_a(0)$. Montrer que la fonction φ_a atteint un minimum en un unique point x_a de $\mathbb{R}$ dont on donnera l'expression en fonction de a.

   b) Étudier le signe de x_a suivant les valeurs de a. Montrer, pour tout réel a vérifiant $a \neq \frac{1}{2}$, l'inégalité : $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$.

Dans toute la suite, pour tout réel a vérifiant $0 < a < 1$, on pose $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$.

III. Étude de l'écart de $\frac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives $z_1, z_2, \ldots, z_r$, on a la majoration $\mathbf{P}(Z \geq 1) \leq \mathrm{E}(Z)$.

2. Calculer, pour tout réel u et tout entier n supérieur ou égal à 1, l'espérance $\mathrm{E}(e^{uS_n})$. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, si a est un réel vérifiant $0 < a < 1$ et t un réel quelconque, on a :
$$\mathrm{E}\left(e^{t\left(\frac{S_n}{n}-a\right)}\right) = e^{n\,\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

3. *On suppose, dans cette question, que a est un réel vérifiant $\frac{1}{2} < a < 1$.*

   a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a l'inégalité :
   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\,\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

   b) En donnant à t, dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'inégalité
   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n$$

4. Soit un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; on pose $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

   a) Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les lois de probabilité des variables aléatoires S_n et $n - S_n$. En déduire l'égalité :
   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right)$$

   puis la majoration :
   $$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n$$

   En quoi cette majoration peut-elle être considérée, pour ε strictement positif fixé, comme meilleure que celle de la question I.2.a ?

   b) À l'aide de l'expression de x_a trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité :
   $$\varphi_a(x_a) = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln(1 - 2\varepsilon)\right)$$

5. a) En déduire qu'on a : $\varphi_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(x_{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, quand ε tend vers 0.

   b) Montrer qu'on peut retrouver ainsi la limite obtenue à la question I.2.b.

IV. Étude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère pour cela le programme Turbo-Pascal `Simulation` reproduit ci-dessous dans lequel `RANDOM(100)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur, avec la loi uniforme, dans l'intervalle [0,99] (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`).

1. Que fait la procédure EP de ce programme ?
2. Quels nombres entiers sont comptabilisés dans les variables U, V et W à la fin du programme ?
3. De quels nombres les valeurs de P1, P2 et P3 fournies par le programme sont-elles des estimations ?
4. À quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1 ?

```
PROGRAM Simulation;
VAR
    n,K,U,V,W,i,j,X : INTEGER;
    S : REAL;
CONST
    nombre_de_lancers = 20000;
    nombre_d_essais = 2000;
PROCEDURE EP(n:INTEGER);
    BEGIN
      S:= 0;
      FOR i:=1 TO n DO
      BEGIN
        X:= RANDOM(100);
        IF X>49 THEN S:= S+1;
      END;
    END;
BEGIN
    RANDOMIZE;
    n:=nombre_de_lancers;
    K:=nombre_d_essais;
    U:=0; V:=0; W:=0;
    FOR j:=1 TO K DO
      BEGIN
        EP(n);
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.4)*Ln(n)) THEN U:=U+1;
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.5)*Ln(n)) THEN V:=V+1;
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.9)*Ln(n)) THEN W:=W+1;
      END;
    WRITELN ('P1 = ' ,U/K);
    WRITELN ('P2 = ' ,V/K);
    WRITELN ('P3 = ' ,W/K);
END.
```

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg