Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2002, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème
- Deuxième problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2002/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n\,.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\,.$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

E.M.LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1.a. Établir, pour tout réel x :

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

puis : $$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

2.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0\,;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.$$

b. En utilisant 1.b. et 2.a., montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}.$$

3.a. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de I_n.

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\big(a_n + \ln(n+1)\big).$$

b. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier l'existence de U et de V.

b. Démontrer :

$$\gamma = U - V.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E,\ \ \langle u(x)\,,\, x\rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1,\ \mathrm{X},\ \mathrm{X}^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi\ :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)\,\mathrm{X}^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\,\mathrm{X}.$$

a. Vérifier : $\quad \forall P \in E,\quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}\,u(P_1)$.

a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille $(P_1,\ P_2)$ est orthonormale.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II. Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout couple $(x,\ y)$ de E^2, développer $\langle u(x+y)\,,\, x+y\rangle$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x,\ y) \in E^2,\ \ \langle u(x)\,,\, y\rangle = -\langle x\,,\, u(y)\rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer : $\quad \forall (i,\ j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \ m_{i,j} = \langle e_i\,,\, u(e_j)\rangle.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III. Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question *II.1.*

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

4.a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\big(x, u(x)\big)$.

b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c. Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d. On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par
$$\langle x\,,\,y\rangle_1 = \langle x\,,\,y\rangle.$$
On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\quad \forall x \in F^\perp,\ \ u_1(x) = u(x)$.
Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV. Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ est une base orthonormale de E.
Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(f_1,\ u(f_1)\big)$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.

3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

- FIN -

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg