Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2003, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, parties I et II
- Premier problème, parties III et IV
- Second problème, partie I : inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique
- Second problème, partie II : application à un exemple

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2003/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 5 mai 2003 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application $\varphi : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n \, \mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n \, \mathrm{d}t, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n \, \mathrm{d}t.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

2. a. Montrer que φ est strictement positive sur $[0;1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0;1]$.

b. Établir, pour tout réel $t \in]0;+\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.

3. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\varphi(t) \geqslant 1 - t$.
(On pourra étudier les variations sur $[0;+\infty[$ de l'application $t \longmapsto \sin t - t + t^2$).

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

E.M.LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Indus trie de Lyon.

Partie II : Étude de I_1

1.a. Montrer, pour tout réel $x \in [1;+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2.a. Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$:

$$|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big).$$

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n pour $n \geqslant 2$

1.a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $\displaystyle |K_n| \leqslant \frac{1}{n-1}$.

2.a. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.

c. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0;1[$:

$$\int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant a \quad \text{et} \quad \int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.$$

(On pourra utiliser ***I.2.***).

d. En déduire, pour tout réel $a \in]0;1[$: $0 \leqslant \ell \leqslant a$, et conclure : $\ell = 0$.

3.a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.

b. Établir : $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

2. En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N} \big(I_{2p} + I_{2p+1}\big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \big(J_{2p} + J_{2p+1}\big).$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser ***I.3.b.***).

SECOND PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ et la norme associée est notée $\|\ .\ \|$.

On note id_E l'application identique de E, et $\widetilde{0}$ l'application nulle de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F.

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\quad \langle\, f(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, f(y)\,\rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2. a. Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \mu\langle\, x\,,\, y\,\rangle.$$

b. En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec $\quad k \geqslant 1, \quad \lambda_0 = 0 \quad$ et $\quad 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.

a. Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0,\ x_1, \ldots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.

b. Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $\quad p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\mathrm{id}_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.$$

5. a. Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Rightarrow\ p_i \circ p_j = \widetilde{0}.$$

b. Montrer : $\qquad f = \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \cdots + \lambda_k\, p_k.$

c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Im}\, f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. a. Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \Big(f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

7. Soit y un vecteur de E.

a. Montrer : $\forall x \in E, \quad \Big(\| f(x) - y \| = \underset{z \in E}{\operatorname{Inf}} \| f(z) - y \| \iff x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\| f(x) - y \| = \underset{z \in E}{\operatorname{Inf}} \| f(z) - y \|.$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.

4. a. Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b. Montrer : $\forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

c. Déterminer la matrice M_2.

5. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg