Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 2003, filière ECG

## Mathématiques I ESSEC (ECS)

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités
- Partie II : existence d'une fonction non constante dans E1(phi)
- Partie III : limite en +infini d'une fonction de E1(phi)
- Partie IV : fonctions bornées de E1(phi)

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2003/maths-s-essec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

***Option scientifique***

**MATHEMATIQUES I**

***Lundi 19 Mai 2003 de 8h à 12h***

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout le problème, on désigne par $n$ un entier naturel et par :
- $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.
- $C^n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $C^n$ sur $\mathbf{R}$.
  En particulier, $C^0(\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$.

A toute fonction $f$ appartenant à $C^0(\mathbf{R})$, on associe l'application notée $\phi f$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\phi f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme $\phi$ de l'espace vectoriel $C^0(\mathbf{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

## PARTIE I : Généralités

1°) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de $\phi f$ en fonction de celles de $f$.

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue $f$ et tout nombre réel $x$ :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1)du.$$

b) On suppose la fonction $f$ paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.

c) On suppose la fonction $f$ croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de $\phi f$ ?

d) On suppose la fonction $f$ convexe (resp. concave). Est-ce le cas de $\phi f$ ?

e) On suppose que la fonction $f$ a une limite $L$ en $\pm\infty$. Est-ce le cas de $\phi f$ ?

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL. : 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC



ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

2°) Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par $\phi$ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

a) Montrer que $\mathbf{R}_n[x]$ est stable par $\phi$. On note alors $\phi_n$ l'endomorphisme induit par $\phi$ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

b) Déterminer la matrice de $\phi_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.

c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $\phi_n$.

3°) Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de $\phi$.

a) Montrer, pour toute fonction $f$ de $C^0(\mathbf{R})$, que $\phi f$ est de classe $C^1$ et préciser sa dérivée.
Pour quelles valeurs du nombre entier $j$ l'espace vectoriel $\phi(C^k(\mathbf{R}))$ est-il inclus dans $C^j(\mathbf{R})$ ?

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

c) L'endomorphisme $\phi$ est-il surjectif ? injectif ?

4°) Dans cette question, on étudie les éléments propres de $\phi$.

a) On considère une valeur propre $\lambda$ de l'endomorphisme $\phi$, autrement dit un nombre réel $\lambda$ tel qu'il existe une fonction non nulle $f$ appartenant à $C^0(\mathbf{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda f$.
Montrer que toute fonction propre $f$ associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est à dire toute fonction continue non nulle $f$ telle que $\phi f = \lambda f$, est nécessairement de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

b) Quelles sont les fonctions-polynômes $f$ qui sont fonctions propres de $\phi$ ?

c) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle $f$ définie par $f(x) = e^{ax}$ $(a \in \mathbf{R})$ telle que $\phi f = \lambda f$.
En déduire que tout nombre réel $\lambda > 0$ est valeur propre de $\phi$.

d) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction bornée $f$ appartenant au sous-espace propre associé à $\lambda$ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\phi)$ associé à la valeur propre 1, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues $f$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel $x$, ou :

$$\int_{x-1}^{x} f(t)dt = f(x).$$

## PARTIE II : Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

1°) On considère la fonction $f_0$ définie de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_0(x) = (x - \frac{1}{2})\exp(\frac{1}{x(x-1)}).$$

a) Montrer que la courbe représentative de $f_0$ admet pour centre de symétrie le point $(1/2\ ,\ 0)$.

b) Montrer que $f_0$ est de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

2°) On définit alors par récurrence à partir de $f_0$ une suite de fonctions $(f_n)$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_{n+1}(x) = f_n(1)\exp(x) - \exp(x)\int_0^x f_n(t)\exp(-t)dt.$$

a) Montrer que $f_{n+1}$ est de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que :

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt.$$

b) Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que :

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t)dt.$$

c) Etablir enfin, pour tout nombre réel $x$ de [0, 1], que $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt + \int_x^1 f_n(t)dt$.

d) On note $f$ l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbf{N}$ par $f(x) = f_n(x-n)$. Ainsi, la fonction $f$ est définie sur la réunion de ces intervalles $[n, n+1[$, et donc sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 1$.

3°) On prolonge la fonction $f$ définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$. A cet effet, on pose $f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$ pour $-1 \leq x < 0$.

Montrer que $f$ est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 0$.

En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc, on obtient une fonction $f$ continue sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel $x$ (on ne demande pas d'expliciter ce raisonnement).

## PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$

On désigne toujours par $f$ une application de $E_1(\phi)$ et par $n$ un nombre entier naturel.

1°) On étudie dans cette question les suites $(M_n)$ et $(m_n)$ des maxima et minima de $f$ sur $[n, n+1]$.

a) Justifier l'existence du maximum $M_n$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[n, n+1]$, puis celle d'un nombre réel $x_n$ appartenant à $[n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que :
- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_n - 1)$ à $f(x_n)$.
- $f$ est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.

c) On définit de même le minimum $m_n$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[n, n+1]$. Etablir la monotonie de la suite $(m_n)$ et en déduire la convergence des suites $(M_n)$ et $(m_n)$.

2°) On étudie dans cette question l'existence d'une limite éventuelle de $f$ en $+\infty$ et on pose :

$$L = 2\int_0^1 tf(t)dt.$$

a) Calculer la dérivée de l'application $x \to g(x) = \int_x^{x+1} (t-x)f(t)dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de $L$.

b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$ :

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que $0 \leq \dfrac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

c) Etablir une inégalité analogue faisant intervenir $L$, $m_n$ et $m_{n+1}$, et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

## PARTIE IV : Recherche des fonctions bornées de $E_1(\phi)$

On désigne maintenant par $f$ une application bornée de $E_1(\phi)$ et on note alors :

$$M = \sup\{\, |f(x)| \;/\; x \in \mathbf{R} \,\}.$$

1°) On étudie dans cette question la fonction $u_0$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

a) Comparer $u_0$ et $\phi f^2 - f^2$ (ou $\phi(f^2) - f^2$).
b) Calculer la dérivée de $u_0$ et en déduire le sens de variation de $u_0$.

2°) On définit alors par récurrence à partir de $u_0$ une suite de fonctions $(u_n)$ définies sur **R** par :

$$u_n(x) = \phi u_{n-1}(x) \quad \text{c'est à dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^{x} u_{n-1}(t)dt .$$

a) Calculer la dérivée de $u_n$ et en déduire le sens de variation de $u_n$.
b) Déterminer le sens de variation de la suite $n \to u_n(x)$ lorsque le nombre réel $x$ est fixé.
c) Etablir pour tout nombre réel $x$ et tout nombre entier naturel $n$ l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leq M^2 .$$

d) En déduire que la suite $n \to u_n(x)$ converge vers 0, puis que $f$ est constante sur **R**.

***

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Polynômes
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Suites réelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg