Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2004, filière ECG

Mathématiques appliquées EDHEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original et le pied de page porte un reste de logiciel de saisie (« swp0000 Page 1/ ?? »).

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2004/maths-appli-edhec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES
Option économique
Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.

2. Calculer u_0 et u_1.

3. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)$
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ln(2)-u_n\leq\frac{1}{n+1}$
   c) Donner la limite de la suite (u_n)

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   b) Montrer que : $\forall n\geq 2,\ 0\leq v_n\leq\frac{1}{n-1}$
   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x)=1$, $e_1(x)=x$ et $e_2(x)=x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B}=(e_0,e_1,e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q=f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2-x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$, et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. a) Donner les valeurs propres de f , puis en déduire que f est diagonalisable.

b) Déterminer les sous-espaces propres de f .

3. a) Justifier l'existence dune matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des 1 telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \frac{1}{12}A$. Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (cest-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face également avec la probabilité 1/2), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, lensemble $Z(\Omega)$

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

c) Vérifier que $\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

d) On rappelle que l'instruction `random(2)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
Program EDHEC2004 ;
var k, n, z, lancer :  integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ; k := 0 ; z := 0 ;
Repeat
k := k + 1 ; lancer := random(2) ;
If (lancer = 1) then .........  ;
until (lancer = 1) or (.........)  ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\ U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{Z=0}(X = i)$.
   b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n-1$, la probabilité $P_{Z=n}(X = i)$.
   c) Pour tout k de $\{1, 2, ..., n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq\ i \leq\ k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{Z=k}(X = i)$.

4. a) Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$
   b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$
   c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, ..., n-1\}$, $P(X = i)$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.

Problème

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^- -, puis donner le tableau de variations de f_n.

3. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a : $f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
   c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, C_n admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$
   d) Donner l'allure de la courbe(C_1).

4. a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que $u_n$est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

6. On pose$I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,dt$.

a) Montrer que : $1 \leq \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\dfrac{1}{u_{n+1}}}$.

b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg