Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2004, filière ECG

Mathématiques appliquées emlyon

Ce que traite le sujet

- Premier exercice
- Deuxième exercice
- Troisième exercice

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original et la durée n'y figure pas.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2004/maths-appli-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHEMATIQUES E.M.LYON Voie Eco 2004

PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Établir, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\quad 2e^t - t - t^2 > 0 \quad$ et $\quad 1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$

   b) En déduire:

$$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   a) Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)\, dt$$

   a) Montrer que G est impaire.

   b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c) Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

   d) Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

DEUXIÈME EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,;\, AM = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,;\, A^2M = AM\right\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. a) Établir : $\quad E_1(A) \subset E_2(A)$

   b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

3. a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$

   b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.
2. En déduire une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = P\,D\,P^{-1}$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
   Montrer : $\quad M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a.: $0 < b < 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à l, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement " la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad P(X = k) = (1-b)\,b^{k-1} + (1-r)\,r^{k-1} + (1-v)\,v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall\,(x,y)\in\,]0,1[\times]0,1[\,,\ f\,(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y)\in\,]0,1[\times]0,1[\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x,y)$.

2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.

3. Montrer que f admet en I un minimum local.

4. a) Exprimer $E\,(X)$ en fonction de $f\,(b,r)$.

   b) Que peut-on dire de $E\,(X)$ lorsque $b=r=v=\dfrac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   On rappelle que $3^t=e^{t\ln(3)}$.

   On note $\alpha=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g\,(t)=0 & \text{si } t\in\,]-\infty;2[\\ g\,(t)=\dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t\in[2;+\infty[\end{cases}$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

   a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

   b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b=r=v=\dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

-FIN -

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Probabilités sur un univers fini
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg