Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 2004, filière ECG

## Mathématiques HEC (ECE)

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, partie A : l'endomorphisme s
- Problème, partie B : racines des polynômes réciproques
- Problème, partie C : nombre de coïncidences aléatoires

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2004/maths-e-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

---

Concepteur : ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

---

OPTION ECONOMIQUE

# MATHEMATIQUES III

Vendredi 14 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE

### 1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier $n$ strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

b) Montrer que, pour tout entier $n$ strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$.

c) Établir, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, la double inégalité : $\dfrac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.
En déduire un équivalent simple de $c_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

d) Calculer $c_1$ et prouver, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

e) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier $n$ strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de $c_n$.

### 2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier $n$ strictement positif, on note $f_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n (1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier $n$ strictement positif et pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 1, l'égalité : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire que, pour tout entier $n$ strictement positif, $f_n$ est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier $n$ strictement positif, $X_n$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet $f_n$ comme densité. On note $F_n$ la fonction de répartition de $X_n$.

c) Pour quelles valeurs de $n$ la variable aléatoire $X_n$ admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de $X_n$ existe, calculer cette espérance en fonction de $c_n$ et de $c_{n-1}$.

d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que $n$ est égal à 1. Préciser la fonction $F_1$.
En déduire l'ensemble des réels $y$ vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2}$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

e) Soit $x$ un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n+1}$.
En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left( \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right)$.
Transformer, pour tout entier naturel $n$ non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$ .

f) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ si $x$ est un réel inférieur ou égal à 1 ? Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

## PROBLÈME

Dans ce problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul $k$, on note $X^k$ le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de $E$.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et $Q$ est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,
on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

*Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de $Q$ en « inversant l'ordre des coefficients ».*
*Par exemple, si $n$ est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.*

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

### PARTIE A

**1. Linéarité de $s$**

Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de $E$ dans lui-même.

**2. Diagonalisation dans un cas particulier**

a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier sans calcul que la matrice $M$ est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de $M$ et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, $M$ est la matrice de l'application linéaire $s$ dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour $s$.

**3. Etude du cas général**

On définit la famille de polynômes $(A_0, ...., A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = x^n & \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

b) Soit $P$ un polynôme non nul et $\lambda$ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de $s$ appartiennent à $\{1, -1\}$.

c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

d) Montrer que la famille $(A_0, ...., A_{2n})$ est libre.

e) En déduire que l'endomorphisme $s$ est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

## PARTIE B

**1. Préliminaires**

On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par :
pour tout réel $x$, $\quad R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$
et pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, $\; R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

a) Déterminer les polynômes $R_3$ et $R_4$.

b) Montrer que, pour tout entier $k$ strictement positif, $R_k$ est un polynôme de degré $k$ vérifiant pour tout réel $x$ non nul, l'égalité : $\; R_k\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$.

c) Pour tout réel $a$, déterminer, s'ils existent, les réels $x$ non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

**2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de $s$ associés à la valeur propre 1**

Dans cette question, $Q$ désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que $a_{2n}$ soit non nul et tel que, pour tout entier $k$ de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\; \widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x)$.

a) Vérifier que 0 n'est pas racine de $Q$.

b) Soit $x$ un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de $Q$ ?

c) On suppose que $n$ est égal à 3 et que $Q$ est défini par :
$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de $Q$.

## PARTIE C

Dans cette partie, $p$ désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par $\Omega$ l'ensemble des éléments de $E$ dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1, p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\Omega$ et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme $Q$ de $\Omega$, l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.
Si $Q$ est un élément de $\Omega$ et $i$ un entier naturel non nul, on dit que $Q$ et $s(Q)$ présentent $i$ coïncidences lorsqu'il existe exactement $i$ entiers $k$ qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire $Z$ qui, à tout polynôme $Q$ de $\Omega$, associe le nombre de coïncidences entre $Q$ et $s(Q)$.
*Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.*

1. **Description d'un cas simple**

   Dans cette question, on suppose que $n$ est égal à 1 et que $p$ est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de $\Omega$ puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Z$.

2. **Étude générale de la variable aléatoire $Z$**

   On revient au cas général : $n$ est strictement positif et $p$ est supérieur ou égal à 2.

   a) Calculer le cardinal de $\Omega$.

   b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre $Z$ est 1 et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

   c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre $Z$ est $2n + 1$ et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 2n+1]) = \frac{1}{p^n}$$

   d) Montrer que $Z$ ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier $j$ vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j+1])$.

   e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que $Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de $Z$ en fonction de $n$ et de $p$.

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Compléments d'algèbre linéaire
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Probabilités sur un univers fini

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg