Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2006, filière ECG

Mathématiques appliquées emlyon

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : un endomorphisme de M2(R)
- Exercice 2 : fonction de deux variables, suite et intégrale
- Exercice 3 : loi de Rayleigh et loi géométrique

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original et la durée n'y figure pas.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2006/maths-appli-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EML 2006
voie Eco

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
   b) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A\,M = M\,D$

2. a) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$
   c) Etablir que (U, A) est une base de E.
   d) Calculer le produit $U\,A$. Est-ce que $U\,A$ est élément de E ?

3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = A\,M - M\,D$.
   a) Vérifier que f est linéaire.
   b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
   c) Quelle est la dimension de l'image de f ?
   d) déterminer les matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
   En déduire que 1 est valeur propre de f.
   Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.
   e) Est-ce que f est diagonalisable ?
   f) Montrer que $f \circ f \circ f = f$

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6)$$

1. a) Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F.
   b) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$?
   c) Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5)$$

   a) Montrer : $\forall x \in [4; +\infty[\,, \quad (x - 2)(2x - 5) \geq 4$

b) En déduire : $\forall x \in [4;+\infty[\,, \quad \varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4,+\infty.[$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(1+u_n, u_n)$$

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq 4^{n+1}$

Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{10}$

4. On note $g : [4,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4;+\infty[\,$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}$$

a) Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

b) Trouver trois réels $a,\ b,\ c$ tels que

$$\forall x \in [4;+\infty[\,, \quad g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}$$

c) Calculer $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\ dx$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$

a) Rappeler une densité de U

b) En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, \quad F(x) = 0 \\ \forall x > 0, \quad F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}(X^2 \leq y)$. *On distinguera les cas* $y \leq 0$ *et* $y > 0$.

c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$
   Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes Z_1, Z_2, …, Z_n, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p.
   on considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

   a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n

   b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Suites réelles
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg