Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2007, filière ECG

Mathématiques appliquées emlyon

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : matrice symétrique et suite de vecteurs
- Exercice 2 : équation x^2 + ln x = 0, suite récurrente et fonction de deux variables
- Exercice 3 : partie entière et partie fractionnaire d'une loi exponentielle

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original et la durée n'y figure pas.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2007/maths-appli-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EML 2007 voie Eco

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P\ D\ P^{-1}$.
   Calculer P^{-1}.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
4. Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.
   On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.
   a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$
   c) Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$
   d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   e) Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$

Exercice 2

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.
On considère l'application :

$$g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur I.
   b) Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.
   c) En déduire : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Calculer u_1
   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in I$
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) = x\ e^y + y\ \ln x$$

1. a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.
2. Est-ce que F admet un extremum local ?

EXERCICE 3

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
   - ⋆ l'événement $(Y = 0)$ est égal l'événement $(X < 1)$
   - ⋆ pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $(Y = n)$ est égal à l'événement $(n \leq X < n + 1)$.

   a) Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$

   b) Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.

   c) Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y

```
program eml2007 ;
var y :integer ; u :real ;
begin
     randomize ;
     u :=random ; y :=··· ;
     while... do
     ... ... ...
     writeln('y vaut ', y) ;
end.
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$.
   On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.
   Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)\,Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
   Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

   a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$

   b) Vérifier que $T^2 = Y^2$
   En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$

   c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

   a) Justifier : $\forall t \in]-\infty; 0[\,,\ F_D(t) = 0$ et : $\forall t \in [1; +\infty[\,,\ F_D(t) = 1$.

   b) Soit $t \in [0; 1[$. Exprimer l'événement $(D \leq t)$ à l'aide des événements $(n \leq X \leq n + t)$, $n \in \mathbb{N}$

   c) Pour tout nombre réel $t \in [0; 1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(n \leq X \leq n + t)$.

   d) Montrer : $\forall t \in [0; 1[\,,\ F_D(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$

   e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg