Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2007, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Premier problème, partie I : étude de f(x) = ln(1 + x)/x
- Premier problème, parties II et III : série et intégrale
- Premier problème, partie IV : extremum d'une fonction de deux variables
- Deuxième problème : l'endomorphisme P -> ((X^2 - 1)P)'' et ses vecteurs propres

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2007/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CODE SUJET :
295
EML_MATS

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application

$$f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I

Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. On considère l'application

$$A : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

b. Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c. Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d. Dresser le tableau de variation de A.

En déduire que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B.

En déduire que f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$: $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}.$$

4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G :]0;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]0;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1\,,1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

Deuxième problème

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de E.

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ est élément de E, où $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(\mathrm{X}^2-1)P$.

On note $\phi : E \longrightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\phi(P) = \big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2$, $\phi(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X}$.

3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

4. Calculer $\phi(\mathrm{X}^k)$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

5. **a.** Montrer que ϕ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

b. Est-ce que ϕ est bijectif ?

c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k.

6. Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(\mathrm{X}) = P(-\mathrm{X})$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-\mathrm{X}) = (-1)^k P_k(\mathrm{X})$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \longmapsto (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(. \mid .)$.

2. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E.

b. Montrer que la base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de E obtenue à la question **I.7** est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3. **a.** Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S \mid P_j) = 0$.

b. En considérant $(1 \mid P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1\,;\,1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,1[$ et $S_m = (\mathrm{X}-x_1)(\mathrm{X}-x_2)\cdots(\mathrm{X}-x_m)$.

a. Justifier : $m \leqslant j$.

b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

c. En considérant $(S_m \mid P_j)$, montrer que $m = j$.

d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

★ ★ ★

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Réels, sommes et produits
- Suites réelles
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire
- Polynômes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg