Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2007, filière ECG

Mathématiques I ESSEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance
- Partie II : les matrices symétriques réelles
- Partie III : monotonie sur les matrices définies positives
- Partie IV : monotonies comparées de f et de la fonction matricielle associée

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2007/maths-s-essec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :

281
ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 2007

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 14 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NOTATIONS, RAPPELS :

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant : $1 \leq k \leq n$.

Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles à n lignes,
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M,
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$.

Objectif du problème : on dispose d'un ordre naturel sur l'ensemble des réels, on s'interroge dans ce problème sur l'extension de cet ordre à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on s'intéresse en particulier à la monotonie de quelques applications.

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La troisième partie utilise simultanément les deux parties précédentes. La quatrième partie reprend essentiellement les notions vues dans la troisième partie.

Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t)dt$.

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^\alpha dt .$$

2°) exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

3°) **On suppose que $\alpha \in]-1,0[$.**

Pour $x > 0$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α.

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$. Préciser le signe de c.

4°) **On suppose que $\alpha \in]0,1[$.**

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x > 0$, $x + h > 0$ et $h \neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}dt .$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x > 0,\ f_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt$

b) Justifier la relation : $\forall x > 0,\ f_\alpha'(x) = f_\alpha'(1).x^{\alpha-1}$. En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$. Préciser le signe de c.

Partie II : les matrices symétriques réelles

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques, c'est-à-dire $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X \neq 0 \Rightarrow {}^tXMX > 0)$.

L'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin, lorsque A et B sont deux matrices symétriques vérifiant $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on dira que A est strictement plus petite que B et on le notera $A < B$.

1°) Caractérisations des matrices définies positives.

a) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, établir l'équivalence suivante : ($A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ toute valeur propre de A est strictement positive).

b) Lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, vérifier l'égalité : $a\,{}^tXAX = (ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2$.

En déduire que : $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0) \right)$.

2°) Exemples.

a) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$:

vérifier que A et B appartiennent à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et montrer que $A < B$. A-t-on $A^2 < B^2$?

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

i) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit l'application : $\phi_X^A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} ; Y \mapsto 2\,{}^tXY - {}^tYAY$

Exprimer, pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X + H) - \phi_X^A(A^{-1}X)$ en fonction de H et A.

En déduire que ϕ_X^A admet en $A^{-1}X$ un maximum qui vaut ${}^tXA^{-1}X$.

iii) On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A < B$.

Montrer que pour tout X et tout Y matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(Y \neq 0 \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)\right)$.

En déduire que $B^{-1} < A^{-1}$.

Partie III : monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Lorsque F est une application définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on dit que F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si : pour tout A et tout B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\left(A < B \Rightarrow F(A) < F(B)\right)$.

On dira de même que F est strictement décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque – F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par exemple, la propriété vue au II-2-b-iii se traduit par la stricte décroissance de l'application $F : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); M \mapsto M^{-1}$.

1°) Résultats préliminaires.

On désigne par A une matrice symétrique réelle dont l'ensemble des valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ est classé dans l'ordre croissant.

On rappelle que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ où $E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$.

a) Justifier la relation $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ où M_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, une telle écriture s'appelle la décomposition de A.

b) Montrer que $I_n = \sum_{i=1}^{p} M_i$.

c) Donner la décomposition de la matrice $A + tI_n$ lorsque t est réel.

Si A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$, on définit, lorsque f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la matrice $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) M_i$.

On peut ainsi considérer l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\tilde{f} : A \mapsto \tilde{f}(A)$.

2°) a) Montrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(A)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $\tilde{f}(A)$ lorsque f est strictement monotone.

b) Préciser $\tilde{f}$ lorsque que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$.

c) Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ deux applications strictement monotones. Montrer que : $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.

d) Lorsque (a, b, c, d) appartient à $\mathbb{R}^4$ avec $c > 0$, $d > 0$ et $bc - ad \neq 0$, on considère l'application $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$.

Après avoir vérifié que : $\forall x > 0,\ h(x) = \frac{bc - ad}{c(cx + d)} + \frac{a}{c}$, montrer la stricte monotonie de $\tilde{h}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Intégrales de matrices.

Soit $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \left(m_{i,j}(t)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} : t \mapsto m_{i,j}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lorsque pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt$ converge, on dit que la matrice $\left(\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}$ existe et on la note $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$.

a) Résultats préliminaires.

(i) Soient M et N telles que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\,dt$ existent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(M(t) + N(t)\right) dt$ existe et que : $\int_0^{+\infty} \left(M(t) + N(t)\right) dt = \int_0^{+\infty} M(t)\,dt + \int_0^{+\infty} N(t)\,dt$.

Dans le même ordre d'idée, on admettra les deux propriétés suivantes (ii) et (iii).

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et h continue de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$ converge, et $M : \mathbf{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); t \mapsto M(t) = h(t)A$,

alors $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ existe et $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt = \left(\int_0^{+\infty} h(t)\,dt\right)A$.

(iii) Soient M telle que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ existe et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

alors $\int_0^{+\infty} {}^tXM(t)X\,dt$ converge et ${}^tX\left(\int_0^{+\infty} M(t)\,dt\right)X = \int_0^{+\infty} {}^tXM(t)X\,dt$.

b) On revient à l'application f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\forall x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$ où φ est une application définie et continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et à valeurs positives, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ converge. (cf Partie I).

On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$.

i) Montrer que : $\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)dt$.

ii) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A < B$, montrer que, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, non-nulle, et tout $t > 0$, on a :

$$ {}^tX\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)X < {}^tX\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1}\right)X .$$

iii) En déduire que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

c) A l'aide des résultats de la Partie I, vérifier que $\tilde{\ln}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Préciser le sens de variation de $\tilde{p}_\alpha$ associée à $p_\alpha : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}; x \mapsto x^\alpha$ selon que $\alpha \in]-1, 0[$ ou $]0, 1[$.

Partie IV : monotonies comparées de f et $\tilde{f}$

On revient aux notations introduites dans les parties précédentes.

1°) On désigne par f une application de $\mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que, lorsque $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, f l'est aussi sur $\mathbf{R}_+^*$.

2°) Pour $t > 0$, on définit les matrices : $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$ et donner la décomposition de $A(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta_0[$, $B(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$. (on ne cherchera pas à déterminer une valeur, même approchée, de η_0.)

c) Etablir de même qu'il existe $\eta_1 \in]0, \eta_0[$ tel que $\forall t \in]0, \eta_1[$, $B(t) < A(t)$.

d) Déterminer $\tilde{p}_\alpha(A(t))$ et $\tilde{p}_\alpha(B(t))$ pour tout réel t de $]0, \eta_1[$ lorsque p_α est l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$: $x \mapsto x^\alpha$.

e) Lorsque $\alpha > 1$, déterminer un équivalent en 0^+ de la quantité $\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right)^2$.

f) En déduire que, pour $\alpha > 1$, $\tilde{p}_\alpha$ n'est pas strictement croissante sur $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$.

3°) Démontrer que la propriété énoncée en IV-1 n'admet pas de réciproque dès que $n \geq 2$.

***

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg