Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2009, filière ECG

Mathématiques HEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, partie I. Analyse
- Problème, partie II. Algèbre et algorithmique
- Problème, partie III. Probabilités

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2009/maths-e-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conception : ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

OPTION ECONOMIQUE **289**

MATHEMATIQUES

HEC__MATE

Mardi 28 avril 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

EXERCICE

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t, par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ et $t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculer $d(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.

b) Établir la formule : $d(AB) = d(A) \times d(B)$.

c) En déduire que si A et B sont semblables, on a : $d(A) = d(B)$.

2. a) Montrer que t est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la dimension de son image et celle de son noyau.

b) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $t(AB) = t(BA)$.

c) En déduire que si A et B sont semblables, on a : $t(A) = t(B)$.

3. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I.

a) Établir l'existence d'un unique couple (α, β) de réels vérifiant : $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

4. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$.

a) Montrer que les trois vecteurs e_1, e_2 et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de u.

b) En déduire qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

5. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AB = BA\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (on discutera selon que A est ou n'est pas colinéaire à I).

PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la relation :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, a et b $(a > b)$ désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ?

b) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2.

c) Déterminer les valeurs propres de A.

d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait : $A^n = a_n A + b_n A^2$.

e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

7. On propose la fonction Pascal suivante :

```
Function f(n : integer) : integer ;
var temp,u,v,k : integer ;
Begin
u := 0 ; v := 1 ;
for k := 1 to n-1 do
      Begin
      temp := ____ ;  v := ____ ;  u := ____
      end ;
f := ___
end ;
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées par des tirets de façon que la valeur rendue soit u_n.

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une *Z-décomposition* s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire : $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[\![1, r-1]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme : $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.

c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

9. On suppose que l'on a défini en Pascal une constante p et un type tab par les instructions suivantes :

```
const p=20 ; type tab=array[2..p] of integer
```

On suppose également que l'on a défini une variable u de type tab telle que, pour tout k de $[\![2, p]\!]$, la variable u[k] contient la valeur u_k. On se donne un entier n vérifiant : $1 \leqslant n \leqslant u_p$.

Rédiger la procédure d'en-tête : `procedure Z (n : integer ; var Res : tab)` de façon que :

$$\texttt{Res}[k] = \begin{cases} u_{k_1} & \text{si } k = k_1 \\ u_{k_2} & \text{si } k = k_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{k_r} & \text{si } k = k_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : «le i-ième tirage donne une boule numérotée 1», et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier i correspondant au premier événement B_i réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si le résultat de l'expérience est : $0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots$, alors Y prend la valeur 6.

10. a) Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $P(B_i)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $P([Y=1]), P([Y=2])$ et $P([Y=3])$.

11. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement : « lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ». On pose : $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $P(C_0)$, $P(C_1)$ et $P(C_2)$.

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $P([Y=n+2]) = p^2qP(C_n)$.

12. a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $P([Y=n+2]), P([Y=n+1])$ et $P([Y=n])$.

13. *On suppose dans cette question que* $p = q = 1/2$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P([Y=n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.

b) Que vaut $P([Y=0])$?

c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $E(Y) = 5$.

d) Calculer la variance $V(Y)$ de Y.

14. *On revient au cas général :* $0 < p < 1$ *et* $q = 1 - p$.

a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s, avec $r > s$.

b) Établir les inégalités suivantes : $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

c) On pose : $\Delta = q^2 + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P([Y=n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$.

d) Calculer $P([Y=0])$.

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.

15. a) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P([Y=n])x^n$. On pose alors :

$g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P([Y=n])x^n$.

b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2x}{1 - qx - pqx^2}$.

16. *On suppose dans cette question que* $p = 2/3$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$.

b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \dfrac{3}{2}\right[$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Logique, ensembles et applications
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg